数理解析研究所講究録
第193巻 1973年 26-34

Hardy の指数級数について I
(収束性と総和可能性を中心として)

岡山大 理　鹿野　健

§0.　いわゆる「約数問題」や「格子点問題」を系統的に研究したのは G. H. Hardy ([9],[10],[11],[12]) であるが，いま彼の全集第2巻 [15] でその歴史的な業績の跡をたどる事は誠に楽しいものである。全くの好みの問題かも知れないが，Hardy の研究には何か洗錬されたもの，スラッとした感じがして読んでいて心地良いが，E. Landau の論文はそれと反対に何かある種のしつっこさやゴタゴタした感じがしてどうもなじめない。Landau の本，例えば有名な "Handbuch" などは論文とは異なって読み易く好きであるのも不思議であるが....。Hardy の論文を，古いものから新しいものへと読んでいると気が付くのだが，若い頃の論文には良い意味でのムダ，例えばずい分とていねいな examples を挙げたり，こう考えてこうやってみたがうまく行かなかったとか，歴史的な説明とかが各所にあって，

私には嬉しい限りである。この傾向は，あるものは続くが，段々と晩年になるにつれて少なくなる様である。それから，日頃感じている事だが，Hardy の英語の誠に簡単でスッキリとしている事である。若い頃は誰しも少々はペダンティックなものなので，彼のにもそれを全く感じない訳ではないが，非常に良く抑えられた見事な文章だと思う。Titchmarsh になると，この人の文章は何だか余りに素気なくて，書いているのがめんどうなのではないかと思う位で，かえって我々にはマネができにくい。論理が数学の中心となって形が整えられて来たという歴史的な事情による所が大きいと思うが，現代の書き方はどうも個性がなくきゅうくつで，型に押し込められているように感じているのは私だけであろうか。

以上のように変な序を書いたのは，実は伏線で，以下では表題の内容を，型にハマっていない（個性的とまでは言わない）やり方で述べようと考えたからに他ならない。

§1.

論文[10]によると，Hardy の考えは次の様なものである。

(1)
$$D(x) = \sum_{n \leq x} d(n) \qquad (d(n) \text{ は } n \text{ の約数の個数})$$
$$= x \log x + (2\gamma - 1)x + \Delta(x),$$
（γ は Euler の定数）

における $\Delta(x)$ の真の大きさを追求することが約数問題であるが，そのために Hardy は Mellin の方法にならって，

(2) $$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{\sqrt{n}}e^{-s\sqrt{n}},$$

$$(s=\sigma+it\ ,\ \sigma>0.)$$

を定義し，この $F(s)$ がもつ性質，特に singularity を求める。それは $\Delta(x)$ を下から評価すること，つまり現在 Ω－結果 とよばれるタイプの問題に役立つのであるが，この考えによって Hardy は始めて，$|\Delta(x)|$の大きさは $o(x^{\frac{1}{4}})$ よりは小さくない事を証明したのである。　一方，

(3) $$\Delta(x)=O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}),\quad (\forall\varepsilon>0)$$

が予想されるが現在もなお未解決である。

Hardy はまた，(2)の部分和で $\sigma=0$ としたものと言える

(4) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{d(k)}{\sqrt{k}}e^{-it\sqrt{k}},\quad (ここでは\ t>0\ とする.)$$

を考える。これは実は2つの意味で重要である。1つは上に述べた Ω－結果を導くことに，もう1つはいわゆる「Voronoi 等式」を証明することに，それぞれ役立つからである。さて，(4)を，t を固定しておいて，n についての大きさを調べる訳であるが，その結果は t が $4\pi\sqrt{q}$ $(q\in\mathbb{N})$ の形の値であるときとないときとで本質的に異ってくる。

それはなぜかと言えば，函数論的には $F(s)$ がそこで singular だからだが，それは実は(1)で x が自然数かそうでないかと言うことに繋がるのである。もっとも，(1)では x が何であっても事情は変わらないのだが，それは上の事実から説明すれば，(1)は2つの singular な級数の差として表わされて，それらの singularity が cancel し合っているからである。 その2つの級数と言うのが，本質的には，級数

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^{\frac{3}{4}}} e^{-it\sqrt{n}},$$

の実数部分と虚数部分なのである。

つまり，(5)を調べるために(4)を調べる訳だが，なぜ始めから(5)を直接扱わないのかという疑問も当然である。

しかし，級数

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^{\alpha}} e^{-it\sqrt{n}}, \quad (t>0)$$

は，$t \neq 4\pi\sqrt{q}$ $(q \in \mathcal{N})$ のときは $\alpha > \frac{1}{2}$ に対して，$t = 4\pi\sqrt{q}$ のときは $\alpha > \frac{3}{4}$ に対してそれぞれ収束することが，(4)の s_n に関する評価，

(7) $$s_n = \begin{cases} o(n^{\varepsilon}) & \cdots\cdots\cdots t \neq 4\pi\sqrt{q}, \\ 2\dfrac{(1+i)\,d(q)}{q^{\frac{1}{4}}} n^{\frac{1}{4}} + o(n^{\varepsilon}) & \cdots\cdots\cdots t = 4\pi\sqrt{q}, \end{cases}$$

から従うのである。 既に述べた様に，(7)は Ω－結果を導

くことにも役立つのである。

この(7)をHardyはどのようにして得たかというと，函数論的方法と，M. Rieszの定理として知られているDirichlet級数論におけるTauber型定理（[16] Thm. 37）のvariantから導くのである。　これはどうも，牛刀をもって云々…の感があるのだが，この論文が1916年（提出は1915年4月17日）のものである事を考えるとうなづけるのである。Hardy と M. Riesz の共著である[16]が出版されたのが1915年だからである。Hardyが一生を通じて愛好したのは級数論であったとは，J. E. Littlewood の言葉であるが，1907年頃（多分実際はもっと以前から考えていたのであろうが）からHardyは主として総和法への応用のために，

$$(8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{iAn^{\alpha}}}{n^{\beta}} \qquad (A>0)$$

のタイプの級数の性質を研究している。　実際，(8)は非常に興味ある例で，級数論（総和法やTauber型定理）を始め，我々の約数問題や格子点問題への応用が極めて多い。私は始めHardyの[14]で(8)を知り，Hardyとは異なる方法で似た様な問題を考えているうちに約数問題に達したので，Hardy自身がどのような経過をたどって[10]に到達したのかに興味を感じている。　(6)は結局，(8)の研究に帰

着するのである。一方，Hardyとは別に，後に A. L. Dixon と W. L. Ferrar は級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^{\alpha}} e^{-it\sqrt{n}} \quad (\text{特に } \alpha = \tfrac{1}{2} \text{ が問題}) \tag{9}$$

（$r(n)$ は Diophantus 方程式 $n = a^2 + b^2$ の解の個数）

の総和可能性について研究した（$\underbrace{[6],[7],[8]}_{}$）が，この事を Hardy は知らずに，[13] p. 82 で，$\overset{\alpha=\frac{1}{2}\text{のとき}}{\text{級数}}$(9) は $t \neq 2\pi\sqrt{g}$ のときに任意次数の Cesàro 総和，あるいは Riesz 総和可能であろうという予想（想像？）を述べている。

実を言うと，私も Dixon と Ferrar の論文のある事も知らなかったので，[13] で Hardy の言っている事を証明しようという気を起し，その前に，それよりも多分少しは易しいはずの，(6) で $\alpha = \frac{1}{2}$ とした級数の収束性と総和可能性を考え始めた所，形の上からは当然かも知れないが，以前考えた(8)に結び付いて行った訳である。Dixon と Ferrar の仕事は後に K. Chandrasekharan と S. Bochner（[1], [2], [3], [4], [5]）によって更に深められた。

§ 2.

私の方法は以上の人達のと違って，実解析的，級数論的であり，その意味で初等的である。そして，例えば約数問題や格子点問題における Voronoi identity を導くのに

有効な別手段ともなる。 Dixon と Ferrar によれば，

$$\text{(10)}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{\sqrt{n}}e^{-it\sqrt{n}}$$

は $t \neq 2\pi\sqrt{q}$ のとき (C,ε) 総和可能であり，これは Chandrasekharan と Bochner によっても証明されているが，彼等の方法では，$\alpha=\frac{1}{2}$ のとき (6) と (9) が実際に発散する事は(少くとも直接)示せないと思う。 私は最近になって，$\alpha=\frac{1}{2}$ のとき (6) が $\forall\varepsilon>0$ について (C,ε) 総和可能である事が，Voronoi 等式と上述の初等的方法とによって証明できる事を知った。 それは同時に，以前に述べた結果 [17] を改良し別証明を与えるものでもある。

最後になってしまい，証明を与えることもできないが，私の得た結果をまとめれば次のようである。([18]).

［定理 1］ $t \neq 4\pi\sqrt{q}$ のときは

$$S_n = O(\log n),$$

であり，これは best な評価である。

［定理 2］ 級数

$$\text{(11)}\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{d(n)}{\sqrt{n}(\log n)^{\alpha}}e^{-it\sqrt{n}},\ (t>0)$$

は，$\alpha>1$ のときすべての $t \neq 4\pi\sqrt{q}$ について収束し，$\alpha \leqq 1$ ならばすべての t について発散する。 特に，$t \neq 4\pi\sqrt{q}$ で $\alpha=1$ ならば有界振動であり，$\alpha \geqq 0$ ならば (C,ε) 総和可能である。

同様の方法で，(9) についても同様の結果が得られると思うがまだ実行していない。また，実は，(11) で $\alpha \leqq 1$ で $t \neq 4\pi\sqrt{q}$ ならば ($t = 4\pi\sqrt{q}$ のときは明かなので) Borel 総和不可能であろうと考えているのだが，まだ成功していない。函数論的にやるのが最も「まとも」なのであろうが，今は，いきがかり上，別の方法を模索中である。

[1] S. Bochner ; Annals of Math., 53 (1951), 332〜363.

[2] S. Bochner and K. Chandrasekharan ; Quart. J. Math. 19 (1948), 238〜248

[3] K. Chandrasekharan and R. Narashimhan ; Acta Arithmetica VI (1961), 487〜503.

[4] ——— ; Annals of Math., 74 (1961), 1〜23.

[5] K. Chandrasekharan ; Arithmetical Functions, Springer Verl. (1970).

[6] A. L. Dixon and W. L. Ferrar ; Quart. J. Math. 5 (1934), 48〜63.

[7] ——— ; Ibid, 172〜185.

[8] W. L. Ferrar ; Compositio Math., 1 (1934), 344〜360.

[9] G. H. Hardy ; Quart. J. Math., 46 (1915), 263〜283.

[10] ——— ; Proc. Lond. Math. Soc. (2) 15 (1916), 1〜25.

[11] G. H. Hardy; Proc. Lond. Math. Soc. (2)(1916), 192 ~ 213.

[12] ———— ; Proc. Royal Soc., A, 107 (1925), 623 ~ 635.

[13] ———— ; Ramanujan, Cambridge (1940).

[14] ———— ; Divergent Series, Oxford (1949).

[15] ———— ; Collected Papers of G. H. Hardy, Oxford (1967).

[16] G. H. Hardy and M. Riesz; The General Theory of Dirichlet's Series, Cambridge (1915).

[17] T. Kano ; 解析数論シンポジュウム報告集, (1972).

[18] ———— ; On Hardy's Exponential Series related to Dirichlet's Divisor Problem, to appear.