数理解析研究所講究録
第 193 巻 1973 年 97-109

算術級数中の素数の数について.

(On some improvements of the Brun-Titchmarsh theorem, II)

本橋洋一　日大理工

(Y. MOTOHASHI / Nihon Univ.)

Abstract.

The purpose of this note is to improve results obtained in our recent paper [1]. We shall prove the following

Theorem

Let $\pi(x; q, l)$ denote the number of primes $\leq x$ that are congruent to $l \pmod q$, where $(q, l)=1$. Then we have

(i) $\pi(x; q, l) \leq (1+\varepsilon)\dfrac{x}{\varphi(q)\log\frac{x}{q^{\frac{3}{2}}}}$ if $x^{\frac{2}{5}} \leq q \leq x^{\frac{1}{2}}$

(ii) $\pi(x; q, l) \leq 2(1+\varepsilon)\dfrac{x}{\varphi(q)\log\frac{x}{q^{\frac{3}{8}}}}$ if $1 \leq q \leq x^{\frac{1}{3}}$

The result (i) seems especially interesting, for by this we may improve known results concerning the size of the least

$P_2 \equiv l \pmod{q}$.

§1. Selbergの篩.

zはあとで定めるとして，ともかく $1 < z \le x$ としておく．$S(x;q,l)$ で x より小で $\equiv l \pmod{q}$ 且つ z 以下の素因子をもたぬものの数とすれば，

$$\pi(x;q,l) \le S(x;q,l) + \frac{z}{q} + 1. \tag{1.1}$$

$S(x;q,l)$ は Selberg の方法で評価するが，ここでは，天下り式に篩の重みをきめておく：

$$\lambda_d = \begin{cases} \dfrac{1}{Y}\cdot\dfrac{\mu(d)d}{\varphi(d)} \displaystyle\sum_{\substack{(r,dq)=1 \\ r \le z/d}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} & (q,d)=1 \text{ 且つ } d \le z \text{ のとき.} \\ 0 & \text{それ以外の場合.} \end{cases} \tag{1.2}$$

但しここに

$$Y = \sum_{\substack{(r,q)=1 \\ r \le z}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} = \sum_{d_1, d_2 \le z} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{[d_1, d_2]} \tag{1.3}$$

であって，この量については

$$Y \ge \frac{\varphi(q)}{q} \log z \tag{1.4}$$

が成立する。更に，

(1.5) $$|\lambda_d| \le 1 .$$

そうして

(1.6) $$S(x;q,l) \le S_0(x;q,l)$$

ここに

$$S_0(x;q,l) = \sum_{\substack{n \equiv l \ (\mathrm{mod}\ q) \\ n \le x}} \Big(\sum_{d|n} \lambda_d \Big)^2 .$$

論文[1]においては，この和をじかに計算して結果を悪くしてしまったので，ここではRiesz平均を考えて改良を行う。即ち，kを正整数として

$$S_k(x;q,l) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n \equiv l \ (\mathrm{mod}\ q) \\ n \le x}} \Big(\log \frac{x}{n}\Big)^k \Big(\sum_{d|n} \lambda_d \Big)^2$$

を考察する。

§2. Tauber型定理.

$S_k(x;q,l)$ の主項は，あとでわかるように $\frac{x}{qY}$ であるので

(2.1) $$E_k(x) = S_k(x;q,l) - \frac{x}{qY}$$

とおく。又，これもあとでわかるが $k \le 3$ としてよいことが示されるので，問題は $S_0(x;q,l)$ と $E_3(x)$ との関係である。

まず $S_k(x;q,l)$ は x について単調増大であるから，λ を正の数として（勿論充分小にとる），

$$\frac{1}{\lambda}\int_{e^{-\lambda}x}^{x} S_{k-1}(\xi;q,l)\frac{d\xi}{\xi} \leq S_{k-1}(x;q,l) \leq \frac{1}{\lambda}\int_{x}^{e^{\lambda}x} S_{k-1}(\xi;q,l)\frac{d\xi}{\xi}.$$

所がすぐわかるように（積分と和を入れかえて）

$$\text{左辺} = \frac{1}{\lambda}\left\{ S_k(x;q,l) - S_k(e^{-\lambda}x;q,l)\right\}$$

$$\text{右辺} = \frac{1}{\lambda}\left\{ S_k(e^{\lambda}x;q,l) - S_k(x;q,l)\right\}$$

従って (2.1) から

$$S_{k-1}(x;q,l) = \frac{x}{q\Upsilon} + O\left(\lambda\frac{x}{q\Upsilon}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\,|E_k(x)|\right).$$

（本当は $\max\limits_{e^{-\lambda}x\leq\xi\leq e^{\lambda}x}|E_k(\xi)|$ を最後の項にすべきだが…）

我々の場合 $k\leq 3$ であるから，たとえば，第1回目の smoothening には λ のかわりに λ^4，次に λ^2，最後に λ とすれば，容易に

$$S_0(x;q,l) = \frac{x}{q\Upsilon} + O\left(\lambda\frac{x}{q\Upsilon}\right) + O\left(\frac{|E_3(x)|}{\lambda^7}\right)$$

たとえば $\lambda = (\log x)^{-2}$ として，

補題 1.

$$S_0(x;q,l) = \frac{x}{qY}\left(1+O((\log x)^{-2})\right) + O(|E_3(x)|(\log x)^{14})$$

§3. $E_k(x)$ の積分表示

$(q, l)=1$ であるから，Dirichlet 指標 χ を用いて，

$$S_k(x;q,l) = \frac{1}{k!\,\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\bar{\chi}(l)\sum_{n\le x}\chi(n)\left(\log\frac{x}{n}\right)^k\left(\sum_{d|n}\lambda_d\right)^2$$

$$= \frac{1}{2\pi i\,\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\bar{\chi}(l)\int_{(a)} L(s,\chi)K(s,\chi)\frac{x^s}{s^{k+1}}\,ds \qquad (a>1)$$

但し

$$K(s,\chi) = \sum_{d_1,d_2\le z}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{[d_1,d_2]^s}\chi([d_1,d_2])$$

従って，すぐわかるように

$$E_k(x) = \frac{1}{2\pi i\,\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\bar{\chi}(l)\int_{(\alpha)} L(s,\chi)K(s,\chi)\frac{x^s}{s^{k+1}}\,ds$$

$$(0<\alpha<1)$$

ここで以後重要になる 2 つの補題を引用しておく。

補題 2. (Gallagher [2])　$T \geq 1$ は任意，$\{a_n\}$ は任意の複素数列，又更に $M, N > 0$ は任意の整数とすると，

$$\sum_{\chi \bmod q} \int_{-T}^{T} \Big| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \chi(n) n^{-it} \Big|^2 dt$$

$$\ll (qT + N) \sum_{M < n \leq M+N} |a_n|^2.$$

補題 3. (Burgess [3])　$0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$|L(\sigma+it, \chi)| \ll q^{\frac{3+10(\frac{1}{2}-\sigma)}{16}+\varepsilon} (|t|+1)$$

[3] には $\sigma = \frac{1}{2}$ の場合しか出ていないが convexity からすぐ上の形がわかる。又 $(|t|+1)$ も [3] では出ていないが，一様性が必要なので入れておく。

更に，補題 2 と　($\chi \neq \chi_0$ のとき)

$$L(\sigma+it, \chi) = \sum_{n \leq y} \frac{\chi(n)}{n^{\sigma+it}} + O\left((|t|+1) \frac{q^{\frac{1}{2}} \log q}{y^{\sigma}}\right)$$

とから，容易に

$$(3.1) \quad \sum_{\chi \bmod q} \int_{-T}^{T} |L(\sigma+it, \chi)|^2 dt \ll q^{2(1-\sigma)} T^3 \log^2 q$$

がわかる。

§4. $E_k(x)$ の評価，I.

まず Selberg にならって，

$$\sum_{d|n} G_s(d,\chi) = \bar{\chi}(n)n^s$$

(但し $G_s(d,\chi) = \sum_{u|d} \mu\left(\frac{d}{u}\right)\bar{\chi}(u)u^s$)，

を用いて

$$K(s,\chi) = \sum_{d\leq z} \frac{\chi^2(d)}{d^{2s}} G_s(d,\chi) H^2\left(s,\chi,\frac{z}{d}\right)$$

$$\left(H\left(s,\chi,\frac{z}{d}\right) = \sum_{d_1\leq z/d} \frac{\chi(d_1)}{d_1^s}\lambda_{dd_1} \right)$$

とかける。そこで更に［1］におけるように，補助変数 z_1

$$1 < z_1 < z$$

を用いて，$K(s,\chi)$ をつぎのように分解する。

$$K(s,\chi) = \sum_{u\leq z} \frac{\chi(u)}{u^s} \sum_{v\leq \frac{z}{u}} \frac{\mu(v)}{v^{2s}} \chi(v^2) H^2\left(s,\chi,\frac{z}{uv}\right)$$

$$= \sum_{u\leq z_1} + \sum_{z_1<u\leq z}$$

$$= K_1(s,\chi) + K_2(s,\chi)$$

従って

$$E_k(x) = E_k^{(1)}(x) + E_k^{(2)}(x)$$

$$E_k^{(j)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\overline{\chi}(l)\int_{(\alpha)} L(s,\chi)K_j(s,\chi)\frac{x^s}{s^{k+1}}\,ds$$

$$(j = 1, 2).$$

以下つねに $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ として，まず $E_k^{(1)}$ を考える。
補題3を用いて，

$$\gamma = \gamma(\alpha) = \frac{1}{16}\left(3 + 10\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\right) + \varepsilon$$

として

$$|E_k^{(1)}| \ll \frac{x^\alpha q^\gamma}{\varphi(q)}\sum_{u \leq z_1}\frac{1}{u^\alpha}\sum_{v \leq z/u}\frac{1}{v^{2\alpha}}\sum_{\chi \bmod q}\int_{(\alpha)}\left|H\left(s;\chi,\frac{z}{uv}\right)\right|^2\cdot$$

$$\cdot\frac{|ds|}{|s|^k}$$

補題2から

$$\sum_{\chi \bmod q}\int_{(\alpha)}\left|H\left(s;\chi,\frac{z}{uv}\right)\right|^2\frac{|ds|}{|s|^k} \ll \left(q + \frac{z}{uv}\right)\left(\frac{z}{uv}\right)^{1-2\alpha}\log x.$$

従って

$$(4.1)\quad |E_k^{(1)}| \ll x^\alpha q^\gamma z^{1-2\alpha}\left(z_1^\alpha + \frac{z}{q}\right)(\log x)^2.$$

§5. $E_k(x)$ の評価, II.

[1] と同じく, $K_2(s,\chi)$ をしらべると,

$$K_2(s,\chi) = \sum_{\substack{z_1 < u \le z \\ uv \le z \\ d_1, d_2 \le \frac{z}{uv}}} \frac{\chi(uv^2 d_1 d_2)}{(uv^2 d_1 d_2)^s} \mu(v) \lambda_{uvd_1} \lambda_{uvd_2}$$

$$= \sum_{n \le z^2/z_1} \frac{\chi(n)}{n^s} f(n)$$

$$f(n) = \sum_{\substack{n = uv^2 d_1 d_2 \\ z_1 < u \le z \\ v \le \frac{z}{u} \\ d_1, d_2 \le \frac{z}{uv}}} \mu(v) \lambda_{uvd_1} \lambda_{uvd_2}$$

このことから $|f(n)| \le \tau_4(n)$ (4個の積で表わす方法) として

$$|E_k^{(2)}(x)| \ll \frac{x^\alpha}{\varphi(q)} \left\{ \sum_{\chi \bmod q} \int_{-\infty}^{+\infty} |L(\alpha+it,\chi)|^2 \frac{dt}{(|t|+1)^{k+1}} \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\chi \bmod q} \int_{-\infty}^{+\infty} |K_2(\alpha+it,\chi)|^2 \frac{dt}{(|t|+1)^{k+1}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

従って, (3.1) 及び 補題 2 から

$$|E_k^{(2)}(x)| \ll \frac{x^\alpha}{\varphi(q)} \left\{ q^{2(1-\alpha)} \log^2 q \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(q + \frac{z^2}{z_1}\right) \sum_{n \le \frac{z^2}{z_1}} \frac{\tau_4^2(n)}{n^{2\alpha}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(5.1)

$$\ll x^\alpha q^{-\alpha} \left(\frac{z^2}{z_1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left(q^{\frac{1}{2}} + \frac{z}{\sqrt{z_1}}\right) (\log x)^{12}$$

以上から (4.1) と (5.1) を加えて ($k \ge 3$ のとき)

$$|E_k(x)| \ll x^\alpha q^\gamma z^{1-2\alpha} \left(z_1^\alpha + \frac{z}{q}\right) (\log x)^{12} +$$

$$+ x^\alpha q^{-\alpha} \left(\frac{z^2}{z_1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left(q^{\frac{1}{2}} + \frac{z}{\sqrt{z_1}}\right) (\log x)^{12}$$

$$\ll x^\alpha z^{1-2\alpha} (\log x)^{12} \left\{ q^\gamma z_1^\alpha + \frac{z}{z_1^{1-\alpha} q^\alpha} + \frac{z}{q^{1-\gamma}} + \right.$$

$$\left. + \frac{q^{\frac{1}{2}-\alpha}}{z_1^{\frac{1}{2}-\alpha}} \right\}.$$

しかるに

$$q^\gamma z_1^\alpha \ge \frac{q^{\frac{1}{2}-\alpha}}{z_1^{\frac{1}{2}-\alpha}} \qquad \left(z_1^{\frac{1}{2}} q^\gamma \ge q^{\frac{1}{2}-\alpha} \right)$$

なぜならば $\gamma = \frac{1}{16}\left(3 + 10\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\right) \ge \frac{1}{2} - \alpha \quad (\alpha \ge 0)$.

よって

$$(5.2) \quad |E_k(x)| \ll x^\alpha z^{1-2\alpha} (\log x)^{12} \left\{ q^\gamma z_1^\alpha + \frac{z}{z_1^{1-\alpha} q^\alpha} + \frac{z}{q^{1-\gamma}} \right\}.$$

§6. 定理の証明.

まず (5.2) に於て

$$q^{\gamma} z_1^{\alpha} = \frac{z}{z_1^{1-\alpha} q^{\alpha}}$$

すなわち　$z_1 = z / q^{\alpha+\gamma}$

とするとき (5.2) は最小となるが，ここで $z_1 \geq 1$ でなければいけないから，第1条件

(i)　$z \geq q^{\alpha+\gamma}$

を得る．そしてこのとき z_1 の値を (5.2) に入れて，

$$|E_k(x)| \ll x^{\alpha} z^{1-2\alpha} (\log x)^{12} \left\{ z^{\alpha} q^{\gamma(1-\alpha)-\alpha^2} + \frac{z}{q^{1-\gamma}} \right\}$$

$$\ll x^{\alpha} q^{\gamma} z^{1-2\alpha} (\log x)^{12} \left(z^{\alpha} q^{-\alpha\gamma-\alpha^2} + z q^{-1} \right)$$

そこで次に

$$z^{\alpha} q^{-\alpha\gamma-\alpha^2} \geq z q^{-1}$$

即ち，(ii) $z \leq q^{(1-\alpha\gamma-\alpha^2)/(1-\alpha)}$ なる場合は

$$|E_k(x)| \ll x^{\alpha} q^{(1-\alpha)\gamma-\alpha^2} z^{1-\alpha} (\log x)^{12}$$

そして，この右辺は

$z < \dfrac{x^{1-\varepsilon}}{q^{1+\alpha+\gamma}}$ のとき

$\dfrac{x}{qY}$ すなわち $S_k(x;q,l)$ の主項より小になる。

z はなるべく大きくとりたいから，$\alpha+\gamma$ がいちばん小さい所，すなわち $\alpha=0$ が best である．よってこのとき

(iii) $$z = \frac{x^{1-\varepsilon}}{q^{\frac{3}{2}}}$$

(i)，(ii)，(iii) は同時に成立していなければならないから，（実は (i)，(ii) は必ずお同時に成立している）．（$\alpha=0$ として）

$$z \geq q^{\frac{1}{2}}, \qquad z \leq q^{2}$$

すなわち

$$x^{\frac{2}{5}-\varepsilon} \leq q \leq x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

これは我々の定理の才1の場合に他ならない。

次に，

(iv) $z \geq q^{(1-\alpha\gamma-\alpha^2)/(1-\alpha)}$ なるときは

$|E_k(x)| \ll x^{\alpha} q^{\gamma-1} z^{2(1-\alpha)} (\log x)^{12}$ であるから，これが $\dfrac{x}{qY}$ より小なるためには，$z \leq \dfrac{x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{q^{\frac{\gamma}{2(1-\alpha)}}}$ であればよい．

z をなるべく大きくとりたいから，$\alpha=\frac{1}{2}$ とすべきで，そのとき

$$(\mathrm{v}) \qquad z = \left(\frac{x^{1-\varepsilon}}{q^{\frac{3}{8}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

とすべきである。これが (iv), (i) と同時に成立するから

$$(\mathrm{i})\text{から} \quad z \geq q^{\frac{11}{16}} \quad , \quad (\mathrm{iv})\text{から} \quad z \geq q^{\frac{21}{16}}$$

従って (V) から

$$q \leq x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$$

これは定理の才2の場合に他ならない。

種々場合についてもっとよく考えてみるべきであろうが ここでは，これ以上の考察はしないことにする。又，$\ell_2 \equiv \ell \pmod{q}$ については別の機会にゆずりたいと思う。

文　献

[1] Y. MOTOHASHI ; On some improvements of the Brun-Titchmarsh theorem, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[2] P.X. Gallagher ; A large sieve density estimate near $\sigma = 1$, Invent. Math. 11 (1970), 329–339.

[3] D.A. Burgess ; On character sums and L-series, II, Proc. London Math. Soc., (3) 13 (1963), 524–536.