数理解析研究所講究録
第 195 巻 1973 年 77-86

Kesten の Nonliner Stochastic Growth Models

京産大 理 森 隆 一

Kesten の一連の論文

[1] H. Kesten, "Some non-linear stochastic growth models." Bull. A.M.S. 77 (1971) 492 ~ 511

[2] ——, "Quadratic transformations," I, II. Adv. Appl. Prob. 2 (1970), 1~82, 179~228

[3] ——. "Limit theorems for stochastic growth models." I, II. Adv. Appl. Prob. 4 (1972) 193~232, ?.

[4] — and P. Stigum "Balanced growth under uncertainity in decomposable economics" preprint

の紹介を行う。なお [1] は Kesten 自身がまとめた要約である。

1. Multitype Galton-Watson process について

Generating function $f_i(s) = \sum_r p_i(r) s_1^{r_1} \cdots s_d^{r_d}$

が与えられたとする。但し d は positive integer. $r = (r_1, \cdots, r_d)$

は nonnegative integer の d-vector, $S=(S_1, \cdots, S_d)$ は $|S_i| \leq 1$ なる complex d-vector. このとき次の条件をみたす $(\mathbb{Z}_+)^d$-valued Markov chain X_n, ($\mathbb{Z}_+$ は non-negative integer の全体), を Multitype Galton-Watson process という.

$$(1) \qquad E(S^{X_{n+1}} / X_0, \cdots X_n) = \prod_{i=1}^{d} f_i(S)^{X_n(i)}$$

$X_n(i)$ は X_n の i-成分.

(1) により各粒子は互いに独立に粒子を生み, この分布は粒子の type によってきまる.

$$0 < m_{ij} \equiv \left.\frac{\partial f_i(S)}{\partial S_j}\right|_{S=(1,\cdots,1)} < \infty, \quad \left.\frac{\partial^2 f_i(S)}{\partial S_j \partial S_k}\right|_{S=(1,\cdots,1)} < \infty$$

と仮定し $M \equiv (m_{ij})$ なる matrix とすれば, まず Perron-Frobenius の定理により. M は絶対値最大, 正かつ simple な固有値 ρ をもつ, 対応する右(左) 固有vector u (v) は strictly positive で $u \cdot v = 1$ と仮定すれば.

$$\left| \frac{M^n(i,j)}{\rho^n} - u(i)\, v(j) \right| \leq K \lambda^n \qquad 0 \leq \lambda < 1$$

がなりたつ. 更に.

$\rho \leq 1$ ならば $X_n = 0$ eventually ($\exists N$, $X_n = 0$ for $n \geq N$)

$\rho > 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{\rho^n} = w \cdot v$ a.e.

w は 1次元確率変数で.

$$1 > \mathrm{Prob}\{W = 0\} = \mathrm{Prob}\{X_n = 0 \text{ eventually}\}.$$

2. Fisher-Wright-Haldane の model.

G-W-process を含むある process の class に対して同様の極限定理を示すことが目標であるが この定理に移るまえに基本的な例を示すことにする. 1-step の transition probability が次で与えられる $(\mathbb{Z}_+)^d$-valued Markov chin を考える。 $Z_n = Z$ の場合にまず $[\frac{|Z|}{2}]$ 個の couple をつくる. (但し $|Z| \equiv \sum_{i=1}^{d} Z(d)$, $Z = (Z(1), \cdots, Z(d))$.) このつくり方は random drawing without replacement により $2r-1$ 番目と $2r$ 番目のものが1つの couple をつくる. 最初が j-type あとが k-type のものを (j,k)-couple と呼ぶ. 次に各 couple は互いに独立に $n+1$-世代の粒子を生む。この場合の分布は couple の type によって決まるものとする. 更に $f(i/j,k)$, $\sigma^2(i/j,k)$ を夫々 (j,k)-couple より生まれる i-type の粒子の平均個数及び分散とし共に有限と仮定する.

この model に対して次のことがなりたつ. $E_n(\cdot\ )$ は $E(\cdot\ /Z_0, \cdots, Z_n)$ 又は $E(\cdot\ /X_0, \cdots, X_n)$ と略したものとすると.

$$(2)\quad E_n(Z_{n+1}(i)) = \sum_{j,k} f(i/j,k)\left[\frac{|Z_n|}{2}\right]\frac{Z_n(j)}{|Z_n|}\frac{Z_n(k)-\delta(j,k)}{|Z_n|-1}$$

更に Z_{n+1} の条件付分散は $|Z_n|$ の order になる.

一方 G.-W. process では

$$(3)\quad E_n(X_{n+1}(i)) = \sum_{j=1}^{d} m_{ji} X_n(j)$$

と成り。(2)と(3)を比べれば(2)の右辺は Z_n の二次式、(3)の右辺は X_n の一次式である。ここで次の operator を考える。

$$(4)\quad Tz(i) = \frac{\sum_{j,k=1}^{d} z(j)z(k)f(i/j,k)}{\sum_{j,k,l=1}^{d} z(j)z(k)f(l/j,k)} \quad ; \ A \to A.$$

$$A = \{z = (z(i)) : z(i) \geq 0,\ \sum z(i) = 1\}$$

$$(5)\quad \tau(Z) \equiv \frac{|Z_n|}{2}\sum_{j,k,l} \tilde{Z}_n(j)\tilde{Z}_n(k)f(l/j,k) \ ;\ (\mathbb{R}_+)^d \to \mathbb{R}_+$$

$$0 \neq Z \in (\mathbb{R}_+)^d \ に対し \quad \tilde{Z} \equiv \frac{Z}{|Z|} \in A.$$

これを用いれば、

$$(6)\quad E_n Z_{n+1}(i) = \tau(Z_n) T\tilde{Z}_n + Y_n \quad , |Y_n| \leq K$$

とかくことができる。平均個数の変化のうち T は割合を τ は絶対値の変化を表わすと考えられる。収束定理の deterministic な部分、G.W. process における Perron-Frobenius の定理に相当する部分を調べるのが次の問題となる。即ち T は A 上の連続作用素であるから不動点は存在するが、更にこの不動点は unique か、また almost contraction (i.e. $\exists K < \infty$, $0 \leq \exists\lambda < 1$, $\forall z \in A$ $|T^n z - p| \leq K\lambda^n$, p は不動点。以下これを a.c. とかく) かどうかを調べることである。文献[2]の[I]にこのための十分条件

及び興味ある実例が示されている. 十分条件の一つとしては

$f = \sum_i f(i|j,k)$ は j,k によらない正の constant.

次をみたす constant $c < \frac{1}{2}$ が存在する.

$$\frac{1}{2f} \sum_i |f(i|j_1,k) - f(i|j_2,k)| \leqq c$$

$$\frac{1}{2f} \sum_i |f(i|j,k_1) - f(i|j,k_2)| \leqq c \qquad {}^{\forall} j, j_1, j_2, k, k_1, k_2$$

ならば T の不動点は unique かつ a.c. である.

3. 収束定理の formulation 及び結果

FWH-model の不動点が unique かつ a.c. である場合の収束定理は[2]の I で示されている. 不動点が unique でない場合には.

<u>定理 9 [3]</u> $\quad f(i|j,k) = c\,w_{jk}\,(\delta(i,j) + \delta(i,k))$

$$0 \leqq w_{jk} = w_{kj} < \infty$$

なる FWH-model において

(i) $W = (w_{jk})$ の任意の principal subdeterminant は 0 でない.

(ii) $c > 0$ $\quad {}^{\forall}p$: T の不動点に対し $cF(p) \neq 0$.

$$\left(F(p) \equiv \sum_{ij} p(i)\, w_{ij}\, p(j) \right)$$

(iii) $p(i) = 0$ なる不動点 p に対し $Wp(i) \neq F(p)$

(iv) $\sigma^2(i|ii) > 0 \quad {}^{\forall}i$

(v) ${}^{\forall}(j,k)$-couple が子供をもたない確率は正.

ならば確率1で random set $\Theta \subset \{1, \cdots, d\}$ が存在し

$$i \notin \Theta \implies Z_n(i) = 0 \quad \text{eventually (i.e. 十分大きい } n \text{ に対し)}$$
$$i \in \Theta \implies Z_n(i) \longrightarrow \infty.$$

また $^\forall \Xi \subset \{1, \cdots, d\}$ に対し

$$G_\Xi \equiv \{ Z_n(i) \to \infty \ ^\forall i \in \Xi,\ Z_n(i) \to 0 \ i \notin \Xi \}$$

上で a.e. に $w > 0$ と不動点 $p \in D(\Xi) \equiv \left\{ z \in A : z(i) \begin{cases} = 0 & i \notin \Xi \\ \neq 0 & i \in \Xi \end{cases} \right\}$ が存在し

$$\gamma(p) = \tau \sum_{l,k} p(l)\, w_{l,k}\, p(k) > 1$$

及び $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{Z_n(i)}{(\gamma(p))^n} = w\, p(i) \quad . \ 1 \le i \le d.$

収束定理はもっと一般な class に対して証明されている。

$\{Z_n\}_{n \ge 0}$ を以下の条件をみたす $(\mathbb{R}_+)^d$-値確率過程とする.

(A). $^\exists \tau : (\mathbb{R}_+)^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $\quad ^\exists T : A \longrightarrow A \quad 0 < {}^\exists \delta \le 1/2$

$$|Z_n| \ge K_0 \qquad 0 \le \gamma \le K_1 |Z_n|^\delta$$

に対し

$$P_n\{ |Z_{n+1} - \tau(Z_n) T \tilde{Z}_n| \ge \gamma |Z_n|^{1-\delta} \} \le K_2 \gamma^{-2}$$

(B) ・T は Lipschitz 連続

・T の不動点は有限個 これを $p_1, \cdots, p_k$ とする.

・$^\forall p_j$ に対し T はある開近傍 U_j 上で連続的微分可能.

(C) $\exists \tau_0 > 0$, $\exists \gamma : A \to [\tau_0, \infty)$, $\exists \beta > 0$ $\exists K_5 < \infty$

- $\tau(Z) \geq \tau_0 |Z|$
- $\left| \dfrac{\tau(Z)}{|Z|} - \gamma(\hat{Z}) \right| \leq K_5 |Z|^{-\beta}$
- $|\gamma(z_1) - \gamma(z_2)| \leq K_5 |z_1 - z_2|^{\beta}$

$^\forall p$: Tの不動点に対して $\varphi : A \to R^{d-1}$ を

$$\varphi(z) \equiv (z(1) - p(1), \cdots, z(d-1) - p(d-1))$$

とする．微分可能性の仮定により

$$\varphi(Tz) = {}^{\exists}N \varphi(z) + o(|z-p|) \qquad z \to p$$

となる matrix N が存在する．Nの固有値を絶対値の大きい順にならべたものを $\lambda_1, \cdots, \lambda_{d-1}$ とする．

<u>定義</u>　p : strongly stable $\iff |\lambda_1| < 1$

unstable $\iff |\lambda_1| > 1$

strongly stable ならば pのある近傍上で Tは almost contraction である．~~∃~~ V を $M = V^{-1} N V$ が

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ \gamma & \ddots & \\ & \gamma & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & & & \\ -\beta & \alpha & & & & & \\ \gamma & 0 & \alpha & \beta & & & \\ 0 & \gamma & -\beta & \alpha & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & \gamma & 0 & \alpha & \beta \\ & & & 0 & \gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

なるかたちの小行列式からなるものとする．γは十分小とする．$\psi \equiv V^{-1}\varphi$ とするとき

(D) $\quad \rho_j = \gamma(p_j) \neq 1.$

$\quad |\lambda_1^{(j)}| \neq 1 \qquad {}^\forall p_j$

(E) $\quad {}^\exists F : A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad$ s.t.

- F は連続
- $F(Tz) \geq F(z) \qquad {}^\forall z \in A.$

  等号は z が不動点の場合にのみ成立.

- ${}^\forall p$: unstable に対し ${}^\exists a, b : B = \psi(A) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad$ s.t.

  (i) $\quad a(0) = b(0) = 0$

  $\quad \|\eta\| \to 0$ ならば

  $\quad |a(x) - a(x+\eta)| + |b(x) - b(x+\eta)| \to 0$

  $\qquad\qquad$ unif. $\quad x \in B,\ x + \eta \in B$

  (ii) $\quad \displaystyle\lim_{\Delta \downarrow 0} \sup_{a(x)+b(x) \leq \Delta} \|x\| = 0$

  (iii) $\quad 3 \leq {}^\exists K_{19} < \infty, \quad 0 \leq {}^\exists \Lambda < 1$ 及び $0 < {}^\forall \varepsilon \leq 1$

に対し $\Delta_0(\varepsilon)$ が存在し ${}^\forall \Delta \leq \Delta_0(\varepsilon)$ に対し

$\quad \cdot\ a(u) \leq \Delta,\ b(u) \leq \varepsilon\Delta,\ u \in B$

$\qquad \Longrightarrow a(S^u_{\#}) \leq K_{19}\Delta, \quad b(S^u_{\#}) \leq 2\varepsilon\Delta$

$\quad \cdot\ a(u) \leq (K_{19} + \varepsilon)\Delta,\ b(u) \leq 3\varepsilon\Delta,\ b(u) > \varepsilon a(u)$

$\quad u \in B \Longrightarrow a(Su) \leq 2K_{19}^2\Delta,\ b(Su) \leq \Lambda\, b(u)$

$\quad$ ここで $S = \psi T \psi^{-1}$

更に $\sigma>0$ ，$0<\varepsilon\leq 1$ が存在し $0<{}^{\forall}\eta<\sigma$ に対し

$$f(\eta)=f(\eta,\sigma,\varepsilon)$$

$$\equiv \inf\{F(z)-F(p):\ \eta\leq|z-p|\leq\sigma,\ b(\varphi(z))\leq\varepsilon a(\varphi(z))\}$$

$$>0$$

(F): unstable な不動点で A の内点に対しては

${}^{\forall}L>0$, ${}^{\forall}\eta>0$, $\exists K(L,\eta)<\infty$, $\delta^*(L,\eta)>0$.

s.t.

$$P_n\{|Z_n|^{1/2}\alpha(\varphi(\tilde{Z}_{n+1})-\varphi(T\tilde{Z}_n))\geq L,\ |Z_n|^{1/2}\beta(\varphi(\tilde{Z}_{n+1})-\varphi(T\tilde{Z}_m))\leq\eta\}$$

$$\geq\delta^*(L,\eta)\qquad \text{a.e. on } \{|Z_n|\geq K(L,\eta),\ \tilde{Z}_n\in U\}$$

α は絶対値が1より大きい固有値に対応する固有空間への projection，β は1より小さいものに対するもの．

・境界上の unstable な不動点に対しては

上が成立するか，又は $p(i)=0$ なる i に対し

$$P_n\{|Z_{n+1}(i)-\tau(Z_n)T\tilde{Z}_m(i)|\geq\gamma Z_n(i)^{1-\delta}\}$$

$$\leq K_2\gamma^{-2}$$

$$\text{if } Z_m(i)\geq K_0,\ 0\leq\gamma\leq K_1 Z_n^{\delta}(i)$$

及び $\rho_j\lambda>1$ なる λ が存在し

$$T\tilde{Z}(i)>\lambda\tilde{Z}(i)\qquad \tilde{Z}\in U$$

定理8°[3] (A) が $\delta = \frac{1}{2}$ に対し成立し (B) 〜 (F) がなりたてば.

$$G^* = \{ Z_n(i) \longrightarrow \infty \ \forall i \}$$

上で a.e. に $\rho_j > 1$ なる strongly stable な不動点 p_j と $w > 0$ が存在し

$$\lim_{n \to \infty} \frac{Z_n}{(\rho_j)^n} = w \, p_j$$

又 $\forall p_j$: strongly stable に対し $\rho_j < 1$ ならば $P\{G^*\} = 0$.