数理解析研究所講究録
第196巻 1973年 57-99

Riemann面の moduli と微分方程式について

中央大 理工　栗林暲和

§1. 序. よく知られているように方程式

$$y^2 = x(x-1)(x-z) \qquad (z \neq 0, 1, \infty)$$

で定義された Riemann 面 $R(z)$ において，その才1種微分 ω は

$$\omega = \frac{dx}{y}$$

で与えられ，その積分

$$\int_g^h \frac{dx}{y} = \int_g^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}} \qquad (g, h = 0, 1, z, \infty)$$

は z をパラメータとみなすとき，2階線型微分方程式

$$(*) \qquad z(z-1)\frac{d^2w}{dz^2} + (2z-1)\frac{dw}{dz} + \frac{w}{4} = 0$$

の解となる. そして微分方程式(*)の適当な2つの解 $w_1(z)$, $w_2(z)$ をとるならば

$$\tau = w_1(z)/w_2(z), \quad \mathrm{Im}\,\tau > 0$$

とすることができる．τ は z に関し多価であるが，その逆関数 $z(\tau)$ は τ 平面の上半平面 $\mathrm{Im}\,\tau>0$ で定義された一価な関数である．

微分方程式(*) に関する上記の性質はつぎのように一般化される．すなわち，一般に超幾何微分方程式

$$(**)\quad z(z-1)\frac{d^2w}{dz^2}+[(\alpha+\beta+1)z-\gamma]\frac{dw}{dz}+\alpha\beta\, w=0$$

において，不等式

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}<1$$

を満たす正の整数 p_1, p_2, p_3 に関して，α，β，γ が関係式

$$(U)\quad \begin{cases} 1-\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}-\dfrac{1}{p_3}+1\right) \\ 1+\alpha-\gamma=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_3}+\dfrac{1}{p_1}-\dfrac{1}{p_2}+1\right) \\ \gamma-\beta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}-\dfrac{1}{p_1}+1\right) \end{cases}$$

を満たすとする．そのときは，微分方程式(**) の2つの解 $w_1(z)$, $w_2(z)$ を適当にえらべば

$$\tau=w_1(z)/w_2(z)\quad,\quad \mathrm{Im}\,\tau>0$$

とすることができる．τ は z に関し多価であるが，その逆関数は τ 平面の上半平面で定義された一価な関数である[5]．

さて，一般に z によって parametrize されている Riemann 面の族 $\mathfrak{F}$ があって，$\mathfrak{F}$ に属する Riemann 面の第1種微分の積分が微分方程式 (D) の解となっているような場合，$\mathfrak{F}$ は微分方程式 (D) に附随しているということにする．例えば，$R(z)$ を $y^2 = x(x-1)(x-z)$ で定義された Riemann 面，$\mathfrak{F}$ を $\mathfrak{F} = \{ R(z) \mid z \in \overline{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\} \}$ で定められた Riemann 面の族とすると $\mathfrak{F}$ は微分方程式 (*) に附随しているということができる．

われわれの第1の目的は微分方程式 (**) に附随する Riemann 面の族を考察することである．第2の目的はそのような族に解析構造を導入することである．第3の目的は，例えば z をパラメータとする Riemann 面 $y^2 = x(x-1)(x-z)$ の族において，われわれの導入した解析構造に関するパラメータ z の解析性が論ぜられるように，微分方程式 (**) に附随する Riemann 面 $R(z)$ の族において，導入された解析構造に関してパラメータ z の解析性が問題となる．そしてわれわれの主たる目的はこれらの事実の一般化であるがそれはここでは述べない．

§2　R を compact な Riemann 面とする．σ を R の1つの自己同型とする．対 (R, σ) を考察する．(R, σ) と (R', σ') とは $f\sigma = \sigma' f$ であるような holomorphic bijection $f: R \to R'$ が存在するならば同型であるという．(R, σ) の同型な類を $\langle R, \sigma \rangle$ で表

わす．つぎの条件を満足するすべての $\langle R,\sigma\rangle$ の集合を

$$\Omega(g', n, \{\nu_1,\cdots,\nu_r\})$$

によって表わす．

(1) R/G は種数 g' $(g'\geqq 0)$ である．ここで G は σ で生成される巡回群．

(2) σ は R 上に r 個の固定点をもつ．G の位数は n である．ここに n は素数である．

(3) t_i を R の点 P_i における局所座標 $(i=1,\cdots,r)$ とする．ここに P_i は σ による不動点．そのとき σ は

$$\sigma:\ t_i \to \zeta^{\nu_i} t_i + \zeta' t_i^2 + \cdots$$

として表わされる．ここに $\zeta=\exp(2\pi i/n)$，そして ν_i は $1\leqq \nu_i < n$ であるような正の整数とする．もちろん ν_i は局所座標の選び方にはよらない．

K' を $R'=R/G$ の代数関数体とする．K を R の代数関数体とする．そのときは K の元 y が

$$K=K'(y),\quad y^n\in K',\quad \sigma(y)=\zeta y$$

であるように存在する．K' が有理関数体ならば Riemann 面 R の方程式は

$$y^n=(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_s)^{m_s}\qquad n\nmid m_1+\cdots+m_s$$

で与えられる．ここに $r=s+1$ とする．$i=1,2,\cdots,s$ に対して，$m_i\nu_i\equiv 1 \pmod n$ が成り立つ．R の種数を g とする

とき，s と g との関係は Riemann-Hurwitz の関係式により

$$2g = (n-1)(s-1)$$

で与えられる．例えば，$\Omega(0, n, \{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\})$ に所属の Riemann 面の方程式は $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=z$ として

$$y^n = x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-z)^{m_3} \qquad n \nmid m_1+m_2+m_3$$

で与えられる．ここに，$m_i\nu_i \equiv 1 \pmod{n}$, $1 \leqq i \leqq 3$ とする．そのとき，ν_4 は $(\sum_{i=1}^{3} m_i)\nu_4 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ で決定されるものである．この Riemann 面の種数は明らかに $n-1$ である．Riemann 面の族 $\Omega(0, n, \{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\})$ はそれゆえ z によって parametrize されているとみなすことができる．

$\Omega(0, n, \{\nu_1, \cdots, \nu_4\})$ に属する Riemann 面 $R(z)$ の第1種微分の全体は $n-1$ 次元の複素 vector 空間である．それを V とするとき，つぎの補題が成り立つ：

Lemma 1 [3] V はつぎのような形の第1種微分で生成される．すなわち，V は

$$\mathcal{V} = \left\{ \omega \;\middle|\; \omega = \frac{x^{k_1}(x-1)^{k_2}(x-z)^{k_3}}{y^l}\,dx \right.$$
$$\left. 0 < l \leqq n-1, \quad 0 \leqq k_i < n \quad (i=1,2,3) \right\}$$

で生成される．ここに第1種微分 ω は関係式

$$(\#)\quad \begin{cases} (n-1) + nk_i - lm_i \geqq 0 & (i=1,2,3) \\ l(m_1+m_2+m_3) - n(k_1+k_2+k_3) \geqq n+1 \end{cases}$$

を満足する.

証明　Riemann 面 $R \in \Omega$ は自己同型

$$\sigma : x \mapsto x, \quad y \mapsto \zeta y \qquad (\zeta^n = 1)$$

をもつ. 適当な基底 $\omega_1, \cdots, \omega_g$ をとると σ は

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_g \end{pmatrix} \sigma = \begin{pmatrix} \zeta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_g \end{pmatrix}$$

と行列で表現される. $\zeta_k^n = 1 \ (1 \leqq k \leqq g)$ である. ここから,

$$\omega_k \sigma = \zeta_k \omega_k .$$

さて, ω_k は才1種微分であるからよく知られているようにある多項式 $\phi(x, y)$ により

$$\omega_k = \frac{\phi(x, y)}{y^{n-1}} dx$$

と表わされる. それゆえ,

$$\omega_k \sigma = \frac{\zeta \phi(x, \zeta y)}{y^{n-1}} dx$$

をうる. また一方においてこれは

$$\zeta_k \omega_k = \frac{\zeta_k \phi(x, y)}{y^{n-1}} dx$$

と表わされるから, $\phi(x, \zeta y) = \zeta^{-1} \zeta_k \phi(x, y)$. この右辺を $\zeta^\alpha \phi(x, y)$ とおく. α は 0 と $n-1$ との間にあるところのある整数である.

そこで

$$\phi(x, y) = a_0(x)\, y^m + a_1(x)\, y^{m-1} + \cdots + a_m(x)$$

とおくとき，

$$\phi(x, \zeta y) = a_0(x)\zeta^m y^m + a_1(x)\zeta^{m-1} y^{m-1} + \cdots + a_m(x),$$

$$\zeta^\alpha \phi(x, y) = a_0(x)\zeta^\alpha y^m + a_1(x)\zeta^\alpha y^{m-1} + \cdots + \zeta^\alpha a_m(x).$$

さて，$\phi(x, \zeta y) = \zeta^\alpha \phi(x, y)$ から $a_{m-\alpha}(x)\zeta^\alpha y^\alpha$ 以外の各項は消える．事実，

$$a_0(x)\zeta^m y^m + \cdots + a_{m-\alpha}(x)\zeta^\alpha y^\alpha + \cdots + a_m(x)$$
$$= a_0(x)\zeta^\alpha y^m + \cdots + a_{m-\alpha}(x)\zeta^\alpha y^\alpha + \cdots + \zeta^\alpha a_m(x),$$
$$\vdots$$
$$a_0(x)\zeta^{nm} y^m + \cdots + a_{m-\alpha}(x)\zeta^{n\alpha} y^\alpha + \cdots + a_m(x)$$
$$= a_0(x)\zeta^{n\alpha} y^m + \cdots + a_{m-\alpha}(x)\zeta^{n\alpha} y^\alpha + \cdots + \zeta^{n\alpha} a_m(x).$$

辺々相加えれば，$\alpha > 0$ のときは

$$n\, a_m(x) = 0 \qquad \therefore\ a_m(x) = 0.$$

ここから，再び同様にして $\alpha > 1$ のときは

$$n\, a_{m-1}(x) = 0 \qquad \therefore\ a_{m-1}(x) = 0.$$

以下同様にして

$$a_{m-k}(x) = 0 \qquad (k = 0, \cdots, m,\ \text{ただし}\ k = \alpha\ \text{を除く})$$

をうる．$\alpha = 0$ ならば証明すべきことはない．従って，

$$\phi(x, y) = y^\alpha f(x), \quad f(x) = a_{m-\alpha}(x)$$

と表わされる．すなわち基底を構成する才1種微分 $\omega_k\ (1 \leqq k \leqq g)$

は

$$\omega_k = \frac{f(x)\,dx}{y^l} \qquad (0 < l \leqq n-1)$$

なる形に表わされ，われわれの問題はこの $f(x)$ が

$$x^{k_1}(x-1)^{k_2}(x-z)^{k_3} \qquad (k_1,\ k_2,\ k_3 \text{ は整数})$$

と表わされることを示すことに帰着される.

$0, 1, z, \infty$ の上にある Riemann 面の点を $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_z, \mathfrak{q}_\infty$ とするならば

$$\mathrm{div}(x) = n\mathfrak{q}_0 - n\mathfrak{q}_\infty, \quad \mathrm{div}(x-1) = n\mathfrak{q}_1 - n\mathfrak{q}_\infty$$

$$\mathrm{div}(x-z) = n\mathfrak{q}_z - n\mathfrak{q}_\infty.$$

$$\mathrm{div}(dx) = (n-1)\mathfrak{q}_0 + (n-1)\mathfrak{q}_1 + (n-1)\mathfrak{q}_z - (n+1)\mathfrak{q}_\infty$$

$$\mathrm{div}(y) = m_1\mathfrak{q}_0 + m_2\mathfrak{q}_1 + m_3\mathfrak{q}_z - (m_1+m_2+m_3)\mathfrak{q}_\infty.$$

そこで

$$\mathrm{div}\left(\frac{dx}{y^l}\right) = \{(n-1) - lm_1\}\mathfrak{q}_0 + \{(n-1) - lm_2\}\mathfrak{q}_1 + \{(n-1) - lm_3\}\mathfrak{q}_z$$
$$+ \{l(m_1+m_2+m_3) - (n+1)\}\mathfrak{q}_\infty.$$

ここから，$f(x)$ の因子の $\mathfrak{q}_\infty$ への寄与は負であることを考慮すれば，$l(m_1+m_2+m_3) - (n+1) \geqq 0$.

まずすべての $(n-1) - lm_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, 3)$ である場合は，$f(x)$ の因子は正因子のある和と $-\deg f(x) \cdot n\mathfrak{q}_\infty$ との和である. 従って，$f(x)dx/y^l$ が第1種であることから

$$l(m_1+m_2+m_3) - (n+1) - sn \geqq 0.$$

故に，

$$\frac{dx}{y^l},\ \frac{xdx}{y^l},\ \cdots,\ \frac{x^{A}dx}{y^l}$$

も才1種である．そして $f(x)dx/y^l$ はわれわれの才1種微分で生成される．

つぎに $(n-1)-lm_i$ $(i=1,2,3)$ のうち負なるものがある場合，それを例えば，$i=2$ とする．$f(x)dx/y^l$ が才1種であることから

$$k_2 \leqq \deg f(x)\ ,\quad (n-1)+nk_2-lm_2 \geqq 0$$

となる1つの数 k_2 が存在して，$f(x)$ は $(x-1)^{k_2}$ なる因数を含む．そのとき，

$$f(x)=(x-1)^{k_2}g(x)\ ,\quad g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{k_1}x^{k_1}$$

とする．ここに $k_1+k_2=\deg f(x)$．そのときは前と同様に，

$$\frac{(x-1)^{k_2}}{y^l}dx,\ \cdots,\ \frac{x^{k_1}(x-1)^{k_2}}{y^l}dx$$

も才1種である．そして $f(x)dx/y^l$ はわれわれの才1種微分で生成される．負なるものが2個ある場合，3個ある場合も同様にして $f(x)dx/y^l$ がわれわれの才1種微分で生成されることがわかる．

才1種微分

$$\omega=\frac{x^{k_1}(x-1)^{k_2}(x-Z)^{k_3}}{y^l}dx$$

においてその因子をみれば関係式(#)を満していることをみるのは容易である。

さて，Riemann 面 $y^n = x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-z)^{m_3}$ $(n \nmid m_1+m_2+m_3)$ の才1種微分を

$$\omega = \frac{x^{k_1}(x-1)^{k_2}(x-z)^{k_3}}{y^l}\,dx$$

とする。いま；

$$\alpha = -k_3 + \frac{lm_3}{n}$$

$$\beta = -(k_1+k_2+k_3) + \frac{l(m_1+m_2+m_3)}{n} - 1$$

$$\gamma = -(k_1+k_3) + \frac{l(m_1+m_3)}{n}$$

とおくとき，才1種微分が満たす関係式(#)からつぎの2つの条件が得られる：

$$(\mathrm{i})\quad \begin{cases} \alpha-\gamma+1 \geqq \dfrac{1}{n} \\ \gamma-\beta \geqq \dfrac{1}{n} \\ 1-\alpha \geqq \dfrac{1}{n} \\ \beta \geqq \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

(ii) $\alpha, \beta, \alpha-\gamma, \beta-\gamma$ は整数ではない。

このようにして定めた α, β, γ により微分方程式（**）をつくるならば，その解 w は g, h を $0, 1, z, \infty$ の中の相異なる任意の2元とするとき，

$$w(z) = \int_g^h x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1}(x-z)^{-\alpha}\,dx$$

で与えられる[5]. ところでこれは

$$\int_g^h \frac{x^{k_1}(x-1)^{k_2}(x-z)^{k_3}}{y^{l}}\,dx$$

に外ならない. すなわち, Ω はある超幾何微分方程式(**)に附随している.

逆に超幾何微分方程式(**)が与えられたとする. ただし,

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} \alpha-\gamma+1 > 0 \\ \gamma-\beta > 0 \\ 1-\alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{cases}$$

(ii) $\alpha,\ \beta,\ \alpha-\gamma,\ \beta-\gamma$ は整数ではない.

(iii) $\alpha=\dfrac{a}{n},\ \beta=\dfrac{b}{n},\ \gamma=\dfrac{c}{n}$; n は素数, a, b, c は整数とする.

Gauss の記号を用いて

$$k_1=[\alpha-\gamma]+1$$

$$k_2=[\gamma-\beta-1]+1$$

$$k_3=[-\alpha]+1$$

とおく. $0<t_i/n<1$ $(i=1, 2, 3)$ を適当に選んで

$$k_1-(\alpha-\gamma)=\frac{t_1}{n},$$

$$k_2-(\gamma-\beta-1)=\frac{t_2}{n},$$

$$k_3-(-\alpha)=\frac{t_3}{n}$$

とすることができる. t_1, t_2, t_3 の最大小約数を l とするとき

$$k_1-(\alpha-\gamma)=\frac{lm_1}{n},$$

$$k_2-(\gamma-\beta-1)=\frac{lm_2}{n},$$

$$k_3-(-\alpha)=\frac{lm_3}{n}$$

とすることができる. ここに m_1, m_2, m_3 は $1\leqq m_i<n$ を満たす整数である. ここから

$$\frac{l(m_1+m_2+m_3)}{n}=k_1+k_2+k_3+1+\beta$$

をうる. 従って明らかに $n \nmid (m_1+m_2+m_3)$. これらの n, m_1, m_2 m_3 によって Riemann 面

$$y^n=x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-z)^{m_3}$$

が作られる. そして

$$\omega=x^{k_1-\frac{lm_1}{n}}(x-1)^{k_2-\frac{lm_2}{n}}(x-z)^{k_3-\frac{lm_3}{n}}dx$$

はその仮定と作り方から明らかに第1種微分である. そこで g, h を $0, 1, z, \infty$ の中の相異なる任意の2元とするとき,

$$\int_g^h \omega$$

は与えられた超幾何微分方程式の解になっている. 条件(i),

(ii), (iii) をもつ超幾何微分方程式 (**) に対して少くとも1つの Riemann 面の族がそれに附随している。いま方程式

$$Y^{n'} = X^{m_1'}(X-1)^{m_2'}(X-z)^{m_3'} \quad (n' \nmid (m_1'+m_2'+m_3'),\ n' \text{ は素数})$$

で与えられた Riemann 面 $R'(z)$ を考察する。$R'(z)$ の才1種微分

$$\omega' = \frac{X^{k_1'}(X-1)^{k_2'}(X-z)^{k_3'}}{Y^{l'}}\,dX$$

についてその積分

$$\int_g^h \omega' \qquad (g, h = 0,\ 1,\ z,\ \infty)$$

が微分方程式 (**) の解であるとする。そのときは

$$k_1' - \frac{l'm_1'}{n'} = \alpha - \gamma = k_1 - \frac{l_1 m_1}{n}$$

からまず $n = n'$。そして $i = 1, 2, 3$ に対して

$$l'm_i' - l m_i \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ n)$$

がいえる。n は素数であるから l' に対して適当に整数 t' をとれば $t'l' \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ n)$。従って、$i = 1, 2, 3$ に対して

$$m_i' - t'l m_i \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ t'n)。$$

$t'l = s$ とおくと、整数 p_1, p_2, p_3 によって $R'(z)$ は

$$\begin{aligned} Y^n &= X^{m_1'}(X-1)^{m_2'}(X-z)^{m_3'} \\ &= \{X^{sm_1}(X-1)^{sm_2}(X-z)^{sm_3}\}\{X^{np_1}(X-1)^{np_2}(X-z)^{np_3}\} \end{aligned}$$

と表わされる。ところがこれは双有理変換

$$\begin{cases} X = \xi \\ Y = \eta\,\xi^{p_1}(\xi-1)^{p_2}(\xi-z)^{p_3} \end{cases}$$

により，方程式

$$\eta^n = \xi^{sm_1}(\xi-1)^{sm_2}(\xi-z)^{sm_3}$$

によって定められる Riemann 面 $R''(z)$ になる．ところがこれはさらに双有理変換

$$\begin{cases} x = \xi \\ y = \eta^{a'}\xi^{m_1 b'}(\xi-1)^{m_2 b'}(\xi-z)^{m_3 b'} \end{cases}$$

を施せば $y^n = x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-z)^{m_3}$ をうる．ただし a', b' は $a's + b'n = 1$ を満たす整数．すなわち，$R(z)$ と $R'(z)$ とは等角同値である．以上をまとめてつぎの定理をうる：

定理 1　超幾何微分方程式を

$$(**) \quad z(z-1)\frac{d^2w}{dz^2} + \{(\alpha+\beta+1)z-\gamma\}\frac{dw}{dz} + \alpha\beta w = 0$$

とする．ただし，

$$(\mathrm{i}) \begin{cases} \alpha-\gamma+1 > 0 \\ \gamma-\beta > 0 \\ 1-\alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{cases}$$

(ii)　$\alpha, \beta, \alpha-\gamma, \beta-\gamma$ は整数ではない．

(iii)　$\alpha = \dfrac{a}{n}$，$\beta = \dfrac{b}{n}$，$\gamma = \dfrac{c}{n}$ ； n は素数，a, b, c は整数とする．そのとき，z によって parametrize されている Riemann 面 $R(z)$ の族 Ω があって，それは微分方程式 (**) に附随

している．すなわち，方程式 $y^n = x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-z)^{m_3}$ で定義される Riemann 面 $R(z)$ が存在して，そのある第1種微分を ω とするとき

$$\int_g^h \omega \qquad (g, h = 0, 1, z, \infty)$$

が微分方程式 (**) の解になっている．$R(z)$ は等角同値を除いて一意的にきまる．

注意 1．超幾何微分方程式 (**) に所属の Riemann 面 $R(z)$ の族 Ω において 1 次独立な解 $w_1(z)$, $w_2(z)$ を適当にとるとき序においてのべたように

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} < 1$$

を満たす正の整数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が関係式 (U) を満すならば

$$\tau = \frac{w_1(z)}{w_2(z)}$$

が $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ で一意的に $z = z(\tau)$ と解ける．Riemann 面 $R(z)$ の方程式を $y^n = x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-z)^{m_3}$，$n \neq (m_1+m_2+m_3)$ とするとき，条件 (U) は $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が

$$k_3 - \frac{l m_3}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} - 1\right)$$

$$k_1 - \frac{l m_1}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} - 1\right)$$

$$k_2 - \frac{l m_2}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1} - 1\right)$$

であるようにとられるかどうか調べることを要する．簡単な計算から

$$s_1 = \frac{n}{n(k_3+k_1)-l(m_3+m_1)+n}, \quad s_2 = \frac{n}{n(k_2+k_3)-l(m_2+m_3)+n}$$

$$s_3 = \frac{n}{n(k_1+k_2)-l(m_1+m_2)+n}.$$

nは素数であるから，ここから容易に

$$k_1 = k_2 = k_3, \quad m_1 = m_2 = m_3$$

を得る．この事実は§4でのべる空間$\mathcal{H}$の次元に密接な関係があることを注意しよう．

§3　zによってparametrizeされているRiemann面の族Ωについて考察する．Riemann面は方程式

$$y^n = x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-z)^{m_3} \qquad (n \nmid m_1+m_2+m_3)$$

で定義されるものとする．Riemann面の自己同型写像

$$\sigma : (x, y) \mapsto (x, \zeta y), \quad \zeta = e^{2\pi i/n}$$

の第1種微分の空間Vにおける表現は第1種微分の基底として§2 Lemma 1で考察したものからとるとき，対角行列でもって

$$\Phi(\sigma) = \begin{pmatrix} \zeta^{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta^{\mu_g} \end{pmatrix}, \quad g = n-1$$

と表わすことができる．そのときつぎの補題が成り立つ：

Lemma 2 [6]　$\Phi(\sigma)$ における ζ^{μ}, $\bar{\zeta}^{\mu}$ の重複度をそれぞれ r_{μ}, s_{μ} とすれば

$$r_{\mu} + s_{\mu} = 2 \quad (\mu = 1, 2, \cdots, g/2)$$

となる.

証明. σ によって生成される巡回群 G の表現を

$$\begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$$

とする. $\bar{\Phi}$ は Φ の複素共役. この表現は G の有理表現に同等である. σ を σ^{i} $(i = 1, 2, \cdots, g/2)$ に置き換えるとき不変である. 従って $\Phi(\sigma)$ における ζ^{μ} および $\bar{\zeta}^{\mu}$ の重複度 r_{μ}, s_{μ} の和 $r_{\mu} + s_{\mu}$ は $\Phi(\sigma^{i})$ における ζ^{μ} および $\bar{\zeta}^{\mu}$ の重複度 r_{μ_i}, s_{μ_i} の和 $r_{\mu_i} + s_{\mu_i}$ に一致しなくてはならない. すなわち, 定数である. これを u とおくとき, $g = u \cdot g/2$. ゆえに, $u = 2$.

Lemma 2 から V の基底を $\omega_1, \cdots, \omega_g$ としその 1 つを

$$\omega = \frac{x^{k_1}(x-1)^{k_2}(x-z)^{k_3}}{y^{l}}\,dx$$

とおくならばつぎのことがいわれる:

(1)　$r_{\mu} = s_{\mu} = 1$ の場合. $\omega_1, \cdots, \omega_g$ の中には ω と同時に

$$\omega' = \frac{x^{k_1'}(x-1)^{k_2'}(x-z)^{k_3'}}{y^{n-l}}\,dx$$

なる形のものが含まれる.

(2) $r_\mu = 2$, $s_\mu = 0$, または $r_\nu = 0$, $s_\nu = 2$ の場合には $\omega_1, \ldots, \omega_g$ の中には ω と同時に

$$\omega' = \frac{x^{k_1'}(x-1)^{k_2'}(x-z)^{k_3'}}{y^{l}}\,dx$$

なる形のものが含まれる．この場合 $\{k_1, k_2, k_3\}$ と $\{k_1', k_2', k_3'\}$ とは 2 組は相等しく，1 組のみその差が 1 に等しい．

Lemma 3 [3]．方程式 $y^n = x(x-1)(x-z)$（n は素数）で定義された Riemann 面 $R(z)$ の自己同型写像 $\sigma : (x, y) \mapsto (x, \zeta y)$ の表現 $\Phi(\sigma)$ において

(i) $n=5$ のとき

$$\Phi(\sigma) = \begin{pmatrix} \zeta & & & 0 \\ & \zeta & & \\ & & \zeta^2 & \\ 0 & & & \bar{\zeta}^2 \end{pmatrix}$$

$$\zeta = e^{2\pi i/5}$$

(ii) $n=7$ のとき

$$\Phi(\sigma) = \begin{pmatrix} \zeta & & & & & 0 \\ & \zeta & & & & \\ & & \zeta^2 & & & \\ & & & \zeta^2 & & \\ & & & & \zeta^3 & \\ 0 & & & & & \bar{\zeta}^3 \end{pmatrix}$$

$$\zeta = e^{2\pi i/7}$$

となり共役なものの数 N はいずれも 1 である．

(iii) $n \geqq 11$ のとき共役なものの数 N は 2 より大である．

証明 $y^n = x(x-1)(x-z)$ の場合 Lemma 1, Lemma 2 によりその才1種微分の基底を具体的に示そう：すなわち，

$$\frac{dx}{y^{n-1}}, \quad \frac{x\,dx}{y^{n-1}}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\frac{dx}{y^{n-l}}, \quad \frac{x\,dx}{y^{n-l}}$$

$$\frac{dx}{y^{n-(l+1)}}, \quad \frac{dx}{y^{l+1}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{dx}{y^{n-(l+k)}}, \quad \frac{dx}{y^{l+k}}$$

と表わすことができる。ここに $l+k=(n-1)/2$. 上段から順次 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{g-1}, \omega_g$ とおくならば $\phi(\sigma)$ はつぎのように表わされる：

$$\phi(\sigma) = \begin{pmatrix} \zeta & & & & & & & & 0 \\ & \bar\zeta & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \zeta^{l} & & & & & \\ & & & & \bar\zeta^{l} & & & & \\ & & & & & \zeta^{l+1} & & & \\ & & & & & & \bar\zeta^{l+1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & \zeta^{l+k} \\ & & & & & & & & & \bar\zeta^{l+k} \end{pmatrix}$$

まず, $l<(n-1)/2$ を証明する.

$$\mathrm{div}(dx) = (n-1)q_0 + (n-1)q_1 + (n-1)q_2 - (n+1)q_\infty,$$

$$\mathrm{div}(y) = q_0 + q_1 + q_2 - 3q_\infty,$$

$$\mathrm{div}(x) = nq_0 - nq_\infty$$

から, $l=(n-1)/2$ すなわち $k=0$ とすると,

$$\mathrm{div}\left(\frac{dx}{y^{n-l}}\right) = \frac{n-3}{2}q_0 + \frac{n-3}{2}q_1 + \frac{n-3}{2}q_2 + \frac{n+1}{2}q_\infty,$$

$$\mathrm{div}\left(\frac{x\,dx}{y^{n-l}}\right) = \frac{3(n-1)}{2}q_0 + \frac{3(n-1)}{2}q_1 + \frac{3(n-1)}{2}q_2 + \frac{1-n}{2}q_\infty$$

が第1種でなければならない。これは矛盾である。即ち $k \geqq 1$.

つぎにℓをこのようにきめて，$\mathrm{div}(x\,dx/y^{n-\ell})$における$q_\infty$の係数を考察すれば

$$n-3\ell-1 \geqq 0, \quad n-3(\ell+1)-1<0$$

$$\therefore \quad 3\ell+4>n \geqq 3\ell+1$$

ここから，$n=3\ell+1$ または $n=3\ell+2$ をうる．$\mathrm{div}(dx/y^{n-\ell})$における$q_\infty$の係数は $3(n-\ell)-(n+1)>0$．従って，ℓを漸次増加させて，q_∞の係数が負となる直前は

$$3(n-\ell-s)-(n+1) \geqq 0, \quad 3(n-\ell-s-1)-(n+1)<0$$

を満足するsにより特性化される．すなわち

$$3\ell+3s+4>2n \geqq 3\ell+3s+1$$

ここから，$2n=3\ell+3s+1$ または $2n=3\ell+3s+2$ をうる．従って，$n=3\ell+1$ から $2n=3\ell+3s+2$ の場合しかなく $\ell=s$．また，$n=3\ell+2$ から $2n=3\ell+3s+1$ の場合しかなく $\ell=s-1$．

従って，

$$n=5 \quad \ell=1 \quad s=2 \quad k=s/2=1,$$

$$n=7 \quad \ell=2 \quad s=2 \quad k=s/2=1,$$

$$n \geqq 11 \quad \ell \geqq 4 \quad s \geqq 3 \quad k=s/2 \geqq 2.$$

Lemma 3 はつぎのように一般化される：

定理 2　方程式 $y^n=x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-z)^{m_3}$ $(n \nmid m_1+m_2+m_3)$ で定義された Riemann 面 $R(z)$ の自己同型写像σの表現$\Phi(\sigma)$において，共役なものの数 N は必ず正である．そして，

(i)　$n=5$　ならば　$N=1, 2$

(ii)　$n=7$　ならば　$N=1, 2, 3$

(iii)　$n \geqq 11$　ならば　$N \geqq 2$

証明　$N \geqq 1$ のみを示す：一般性を失わず $m_1 \leqq m_2 \leqq m_3$ としてよい．さらに，$1 \leqq m_1 \leqq m_2 \leqq g/2$，$1 \leqq m_3 \leqq g$　$(g=n-1)$ である場合を考察すれば十分である．$1 \leqq l \leqq g/2$ に対して

$$\mathrm{div}\left(\frac{x^{k_1}(x-1)^{k_2}(x-z)^{k_3}}{y^l} dx \right)$$

$$= \{(n-1)+nk_1-lm_1\} \mathfrak{p}_0 + \{(n-1)+nk_2-lm_2\} \mathfrak{p}_1$$
$$+ \{(n-1)+nk_3-lm_3\} \mathfrak{p}_z$$
$$+ \{l(m_1+m_2+m_3)-n(k_1+k_2+k_3)-(n+1)\} \mathfrak{p}_\infty$$

となるから，オ1種微分であるためには

$$(n-1)+nk_i-lm_i \geqq 0 \qquad (i=1, 2, 3),$$

$$l(m_1+m_2+m_3)-n(k_1+k_2+k_3)-(n+1) \geqq 0$$

となることが必要十分である．いま，

$$m_1+m_2+m_3 \geqq n+1$$

とするとき，仮定

$$1 \leqq m_1 \leqq m_2 \leqq g/2, \quad 1 \leqq m_3 \leqq g$$

から，$2n-2 \geqq m_1+m_2+m_3 \geqq n+1$ となる．ここから $l=1$，$k_1=k_2=k_3=0$ である微分 $\omega = dx/y$ はオ1種で，$l=n-1$ とするとき，k_1'，k_2'，k_3' を適当にとるならば

$$\frac{x^{k_1'}(x-1)^{k_2'}(x-z)^{k_3'}}{y^{n-1}}dx$$

もオ1種微分である．すなわち $N \geqq 1$．つぎに，

$$m_1+m_2+m_3<n$$

ならば明らかに

$$2n+1>2(m_1+m_2+m_3)-n(k_1+k_2+k_3)$$

となるから，右辺 $\geqq n+1$ ならば $N\geqq 1$ となって証明は終る．右辺 $<n+1$ ならば，再び

$$2n+1>3(m_1+m_2+m_3)-n(k_1'+k_2'+k_3')$$

となるから，右辺 $\geqq n+1$ ならば $N\geqq 1$ となって証明は終る．ここに，$k_1\leqq k_1'$，$k_2\leqq k_2'$，$k_3\leqq k_3'$．右辺 $<n+1$ ならば以上の操作をつづける．そこで

$$M=m_1+m_2+m_3$$

とおく．もしこの操作が $l=g/2$ まで続くものとする．即ち，

$$\begin{aligned}
&M<n\\
&2M-n(k_1+k_2+k_3)\leqq n\\
&\quad\vdots\\
&lM-n(k_1'+k_2'+k_3')\leqq n\\
&\quad\vdots\\
&\frac{g}{2}M-n(k_1''+k_2''+k_3'')\leqq n
\end{aligned}$$

とするとき矛盾を示せばよい．そのために

(I) m_1, m_2, m_3 がすべて奇数である場合：

$$m_i = 2s_i + 1 \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$\therefore \quad 2(s_1+s_2+s_3) < n-3$$

ところで一般に m が奇数のとき

$$\frac{n-1}{2}\cdot m = (n-1)s + \frac{n-1}{2} = sn + \left(\frac{n-1}{2} - s\right)$$

$$\therefore \quad \frac{n-1}{2}(m_1+m_2+m_3) - n(k_1+k_2+k_3)$$

$$= \frac{n-1}{2}\times 3 - (s_1+s_2+s_3) > \frac{3(n-1)}{2} - \frac{n-3}{2} = n \text{ .}$$

これは矛盾である。

(II) m_1, m_2 が奇数，m_3 が偶数である場合

$$m_1 = 2s_1+1,\quad m_2 = 2s_2+1,\quad m_3 = 2s_3$$

$$\therefore \quad 2(s_1+s_2+s_3) < n-2$$

ところで一般に m が偶数のとき

$$\frac{n-1}{2}\cdot m = (n-1)s = n(s-1) + (n-s)$$

$$\therefore \quad \frac{n-1}{2}(m_1+m_2+m_3) - n(k_1+k_2+k_3)$$

$$= \frac{n-1}{2}\times 2 + n - (s_1+s_2+s_3) > 2n-1 - \frac{n-2}{2} > n \text{ .}$$

これは矛盾である。

(III) m_1 が奇数，m_2, m_3 が偶数である場合

$$m_1 = 2s_1+1,\quad m_2 = 2s_2,\quad m_3 = 2s_3$$

$$\therefore \quad 2(s_1+s_2+s_3) < n-1 \text{ .}$$

ところでこのときは，

$$\frac{n-1}{2}(m_1+m_2+m_3) - n(k_1+k_2+k_3)$$

$$= \frac{n-1}{2} + n + n - (s_1+s_2+s_3) > 2n + \frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{2} > n$$

これは矛盾である.

(IV)　m_1, m_2, m_3 が偶数である場合

$$m_i = 2s_i \qquad (i=1,2,3)$$

$$\therefore \quad 2(s_1+s_2+s_3) < n$$

ところでこのときは

$$\frac{n-1}{2}(m_1+m_2+m_3) - n(k_1+k_2+k_3)$$

$$= 3n - (s_1+s_2+s_3) > 3n - \frac{n}{2} > n$$

これは矛盾である. (I)～(IV) ですべての場合がつくされて,

$$N \geqq 1$$

の証明がおわる.

§4　$K = \mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta = e^{2\pi i/n}$ とする. 明らかに $[K:\mathbb{Q}] = n-1$. Φ を $n-1$ 型の複素行列による K の表現, ρ を複素共役とする. $\mathcal{P} = (A, \mathcal{C}, \theta)$ が型 $\{K, \Phi, \rho\}$ の偏極 abel 多様体であるとは, つぎの条件が満される場合をいう [6]:

(i)　A は $\mathbb{C}$ 上で定義された $n-1$ 次元の abel 多様体である.

(ii)　θ が K から $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ の中への同型対応で, $a \in K$ に対する A の解析的座標による $\theta(a)$ の表現が $\Phi(a)$ に同値である.

(iii)　$\mathcal{C}$をAの1つのpolarizationとする．$\mathcal{C}$によってきまる$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$のinvolutionが$\Theta(K)$上で$\theta(a)\longmapsto\theta(a^{\rho})$と一致する．

Aに同型であるcomplex torusを$\mathbb{C}^{n-1}/D$とする．Dは$\mathbb{C}^{n-1}$における1つの格子である．$\mathbb{C}^{n-1}$の座標系を$\theta(a)$がすべての$a\in K$に対して$\Phi(a)$で表わされるように選ぶことができる．そのとき，$\mathbb{C}^{n-1}$の2個のベクトル$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$を

$$\mathbb{Q}D=\Phi(K)\mathfrak{x}_1+\Phi(K)\mathfrak{x}_2$$

が成り立つように選ぶことができる．任意の元$\mathfrak{a}=(a_1,a_2)\in K\times K$に対して

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{a})=\Phi(a_1)\mathfrak{x}_1+\Phi(a_2)\mathfrak{x}_2$$

とおくならば，写像：$\mathfrak{a}\longmapsto\mathfrak{x}(\mathfrak{a})$は$K\times K$から$\mathbb{Q}D$の上への同型対応となる．$\mathfrak{m}$をこの写像によるDの逆像とする．

$E(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$を$\mathbb{C}^{n-1}/D$上$\mathcal{C}$に対応するRiemann形式とするとき，Kの元$t_{ij}$が

$$E(\Phi(a)\mathfrak{x}_i,\mathfrak{x}_j)=\mathrm{tr}(at_{ij})\qquad(1\leqq i,j\leqq 2)$$

であるように存在する．$T=(t_{ij})$とおく．$T^{\rho}=-T$となる．

H_μをr_μ行s_μ列の複素行列Zで$1-Z^{t}\bar{Z}$が*positive hermitian*であるものの全体とする：

$$\mathcal{H}=H_1\times\cdots\times H_{(n-1)/2}$$

とおく．$\mathcal{H}$の次元は$\dim\mathcal{H}=\sum_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}}r_\mu s_\mu$で与えられる．$\mathcal{H}$の点$\mathfrak{z}$によってparametrizeされている型$\{K,\Phi,\rho;T,\mathfrak{m}\}$の

偏極abel多様体 $\mathcal{P}_z$ の1つの解析的族 $\Sigma(T,\mathfrak{M})=\{\mathcal{P}_z \mid z\in\mathcal{H}\}$ をうる。構造 $\{K\times K,\ T,\ \mathfrak{M}\}$ は $\mathcal{P}$ によって同型を除いて一意的にきまる。それで $\mathcal{P}$ は型 $\{K,\Phi,\rho\,;T,\mathfrak{M}\}$ であるという。さて、

$$\Gamma(T,\mathfrak{M})=\{U\in M_2(K)\mid UT\bar{U}=T,\ \mathfrak{M}U=\mathfrak{M}\}$$

とするとき、$\Gamma(T,\mathfrak{M})$ は $\mathcal{H}$ 上の1つの *properly discontinuous* な群を与える。$\Sigma(T,\mathfrak{M})$ の同値類と $\mathcal{H}/\Gamma(T,\mathfrak{M})$ とは1対1の対応がつけられる[6]。そこでいま記号の繁雑を避けるために

$$(*)\qquad \Phi(\zeta)=\begin{pmatrix} \zeta & & & & & & & & & 0 \\ & \zeta & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & \zeta^{\ell} & & & & & & \\ & & & & \zeta^{\ell} & & & & & \\ & & & & & \zeta^{\ell+1} & & & & \\ & & & & & & \bar{\zeta}^{\ell+1} & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \zeta^{\ell+k} & \\ 0 & & & & & & & & & \bar{\zeta}^{\ell+k} \end{pmatrix}$$

とする。そして

$$\mathfrak{X}_1=\begin{pmatrix}\Omega_{11}\\ \Omega_{21}\\ \vdots\\ \Omega_{g1}\end{pmatrix},\qquad \mathfrak{X}_2=\begin{pmatrix}\Omega_{12}\\ \Omega_{22}\\ \vdots\\ \Omega_{g2}\end{pmatrix}$$

とおく。これらから行列

$$X_1=\begin{pmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{pmatrix},\ \cdots,\ X_\ell=\begin{pmatrix}\Omega_{2\ell-1,1} & \Omega_{2\ell-1,2}\\ \Omega_{2\ell,1} & \Omega_{2\ell,2}\end{pmatrix}$$

$$X_{\ell+1}=\begin{pmatrix}\Omega_{2\ell+1,1} & \Omega_{2\ell+1,2}\\ \bar{\Omega}_{2\ell+2,1} & \bar{\Omega}_{2\ell+2,2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ X_{\ell+k}=\begin{pmatrix}\Omega_{2\ell+2k-1,1} & \Omega_{2\ell+2k-1,2}\\ \bar{\Omega}_{2\ell+2k,1} & \Omega_{2\ell+2k,2}\end{pmatrix}$$

をつくる。そのときはある行列 W_ν が存在して

$$X_\nu \overline{W}_\nu^{-1} = \begin{pmatrix} u_\nu & v_\nu \\ w_\nu & y_\nu \end{pmatrix}$$

とおく． $j = 1, \cdots, k$ に対して

$$\mathfrak{z}_j = \left(\frac{v_{l+j}}{u_{l+j}}\right) = \overline{\left(\frac{w_{l+j}}{y_{l+j}}\right)}$$

とおくならば $1 - \mathfrak{z}_j \overline{\mathfrak{z}}_j > 0$ をうる． $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ をある行列 Λ で $\Lambda\mathscr{C}_1, \Lambda\mathscr{C}_2$ と置きかえて，これらのベクトルについて前と同様に行列

$$X_1, \cdots, X_l, X_{l+1}, \cdots, X_{l+k}$$

を作るならば

$$X_\nu \overline{W_\nu}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1 \leqq \nu \leqq l),$$

$$X_{l+j} \overline{W}_{l+j}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{z}_j \\ \overline{\mathfrak{z}}_j & 1 \end{pmatrix} \qquad (1 \leqq j \leqq k).$$

をうる．この行列を $\mathcal{S} = (A, \mathscr{C}, \Theta)$ の Riemann 行列の正規形という [6]．

§3 で考察した定理 2 から $\dim \mathcal{H} = k \geqq 1$ であることがわかる．そこで族 Σ における偏極 Jacobi 多様体の模様を考察しよう．まず，$\Phi(\zeta)$ が行列 (※) で与えられたとき，その自己同型写像の表現が $\Phi(\zeta)$ となる Riemann 面は一般に §2 から

$$y^n = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_s)^{m_s}, \quad n \nmid (m_1 + \cdots + m_s)$$

で表わされる．種数 $n-1$ を考慮すれば $s+1=4$ から，

$$y^n=(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}(x-a_3)^{m_3}.$$

ここで，$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=z$ とおくならば

$$y^n=x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-z)^{m_3}$$

で表わされるとしてよい．この方程式で定義される Riemann 面 $R(z)$ の第1種微分は §2 Lemma 1 で与えられる．

つぎに，$R(z)$ の $\mathbb{Q}$ 係数の1次元 homology 群を $H_1(R(z),\mathbb{Q})$ とする．$R(z)$ の自己同型写像 σ によって自然に誘起される $H_1(R(z),\mathbb{Q})$ の endomorphism を $\varphi_*(\sigma)$ とする．そのとき，$\varphi_*(a)$ を

$$\varphi_*(a)=a_0+a_1\varphi_*(\sigma)+\cdots+a_{n-2}\varphi_*(\sigma)^{n-2}$$

によって定義する．ただし，$a=a_0+a_1\zeta+\cdots+a_{n-2}\zeta^{n-2}$ $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}\in\mathbb{Q})$．そのときは $\varphi_*(a)$ は $H_1(R(z),\mathbb{Q})$ に作用する．それ故，$H_1(R(z),\mathbb{Q})$ は $\varphi_*(\mathbb{Q}(\zeta))$ 上の vector 空間とみなされる．従って，$Z_1(z)$，$Z_2(z)$ が

$$H_1(R(z),\mathbb{Q})=\varphi_*(\mathbb{Q}(\zeta))Z_1(z)+\varphi_*(\mathbb{Q}(\zeta))Z_2(z)$$

となるように存在する．$R(z)$ の第1種微分の基底の1つを

$$\omega_1(z),\ \cdots,\ \omega_g(z)$$

とするとき，

$$\mathfrak{z}_1(z)=\begin{pmatrix}\int_{Z_1(z)}\omega_1(z)\\ \vdots\\ \int_{Z_1(z)}\omega_g(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Omega_{11}(z)\\ \vdots\\ \Omega_{g1}(z)\end{pmatrix}$$

$$\mathscr{C}_2(z) = \begin{pmatrix} \int_{Z_2(z)} \omega_1(z) \\ \vdots \\ \int_{Z_2(z)} \omega_g(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{12}(z) \\ \vdots \\ \Omega_{g2}(z) \end{pmatrix}$$

とおく．そのとき，行列

$$X_{\ell+1} = \begin{pmatrix} \Omega_{2\ell+1,1}(z) & \Omega_{2\ell+1,2}(z) \\ \bar{\Omega}_{2\ell+2,1}(z) & \bar{\Omega}_{2\ell+2,2}(z) \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$X_{\ell+k} = \begin{pmatrix} \Omega_{2\ell+2k-1,1}(z) & \Omega_{2\ell+2k-1,2}(z) \\ \bar{\Omega}_{2\ell+2k,1}(z) & \bar{\Omega}_{2\ell+2k,2}(z) \end{pmatrix}$$

をうる．以上を綜合してつぎの定理が得られる：

定理 3 [4]　n を素数．$\zeta = e^{2\pi i/n}$ とする．さらに

$$\Phi(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta^{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta^{\mu_g} \end{pmatrix}$$

とする．型 $\{\Omega(\zeta), \Phi(\zeta), \rho ; T, \mathfrak{M}\}$ の偏極 abel 多様体 $\mathscr{P} = (A, \mathcal{C}, \theta)$ の族 $\Sigma(T, \mathfrak{M})$ を parametrize する空間を $\mathscr{H}$ とする．$\mathscr{H}$ 上の properly discontinuous な群 Γ により $\mathscr{H}/\Gamma$ をつくるとき $\mathscr{H}/\Gamma$ における偏極 Jacobi 多様体は方程式

$$y^n = x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-z)^{m_3}, \quad n \nmid m_1+m_2+m_3$$

により定まる Riemann 面 $R(z)$ に対応する Jacobi 多様体からなる．ここに，m_1, m_2, m_3 は $R(z)$ の自己同型の表現が $\Phi(\zeta)$ に同値であるように選ばれるものとする．そのときは $\mathscr{H}/\Gamma$ の

局所座標を

$$(\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_k) \qquad (k \geqq 1)$$

とするとき，偏極 Jacobi 多様体の座標は $j=1, \cdots, k$ に対して

$$\mathfrak{z}_j = \frac{a_i \Omega_{2\ell+2j-1,1}(z) + b_j \Omega_{2\ell+2j-1,2}(z)}{c_j \Omega_{2\ell+2j-1,1}(z) + d_j \Omega_{2\ell+2j-1,2}(z)}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \neq 0$$

で与えられる．ここに，

$$\Omega_{2\ell+2j-1,1}(z), \quad \Omega_{2\ell+2j-1,2}(z)$$

は第1種微分の基底を構成する1つの微分

$$\omega_{2\ell+2j-1}(z)$$

の $\mathbb{Q}$ 係数の1次元 homology 群 $H_1(R(z), \mathbb{Q})$ の基底 Z_1, Z_2 に関する周期

$$\int_{Z_1} \frac{x^{k_1}(x-1)^{k_2}(x-z)^{k_3}}{y^{\ell+j}}\, dx, \quad \int_{Z_2} \frac{x^{k_1}(x-1)^{k_2}(x-z)^{k_3}}{y^{\ell+j}}\, dx$$

で与えられる超幾何関数である．

$\dim \mathcal{H} = 1$ の場合はさらに詳しく計算することができる．定理2から $n=5$ と $n=7$ の場合を調べればよい．つぎの定理が得られる：

定理4 [2]．$\mathcal{H}/\Gamma$ 内には Jacobian に対応しないただ1点があって，それを $\mathcal{P}_0 = (A_0, \mathcal{C}_0, \Theta_0)$ とするとき

$$A_0 \cong J_1 \times J_2$$

と表わされる．ここに J_1 は方程式

$$y^5 = x(x-1)$$

で定義される Riemann 面から生ずる Jacobi 多様体，J_2 は方程式

$$y^5 = x(x-1)^2$$

で定義される Riemann 面から生ずる Jacobi 多様体である．

$n=7$ の場合も全く同様である．すなわち，Jacobian に対応しない点はただ1点で，それを $\mathscr{P}_0 = (A_0, \mathcal{C}_0, \theta_0)$ とするとき

$$A_0 \cong J_1 \times J_2$$

と表わされる．ここに J_1 は方程式

$$y^7 = x(x-1)$$

で定義される Riemann 面から生ずる Jacobi 多様体，J_2 は方程式

$$y^7 = x(x-1)^2$$

で定義される Riemann 面から生ずる Jacobi 多様体である．

証明．$n=7$ の場合を示す：等角同値を除いて方程式

$$y^7 = x(x-1)(x-z)$$

により定義される Riemann 面 $R(z)$ のみが $\dim \mathcal{H} = 1$ に関係する．すなわち，$R(z)$ の自己同型

$$\sigma : (x, y) \longmapsto (x, \zeta y), \quad \zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$$

の表現は

$$\Phi(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta & & & & & 0 \\ & \zeta & & & & \\ & & \zeta^2 & & & \\ & & & \zeta^2 & & \\ & & & & \zeta^3 & \\ 0 & & & & & \bar{\zeta}^3 \end{pmatrix}$$

となる．$\mathcal{H}/\Gamma$ が compact であることは知られている[7]．一方において $\mathcal{H}/\Gamma$ の generic points は Jacobian であるから Hoyt の定理から Jacobian でない Abelian は Jacobian の有限個の積でなければならない．すなわち，Abelian を $\mathcal{P}_0 = (A_0, \mathcal{C}_0, \theta_0)$ とするとき，

$$A_0 \cong J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_\ell$$

となる．ここに J は Jacobi 多様体とする．

$$\Phi_1(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta & & 0 \\ & \zeta^2 & \\ 0 & & \zeta^3 \end{pmatrix}$$

に対する Riemann 面 R_1 の方程式は

$$y^7 = x(x-1).$$

$$\Phi_2(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta & & 0 \\ & \zeta^2 & \\ 0 & & \bar{\zeta}^3 \end{pmatrix}$$

に対する Riemann 面 R_2 の方程式は

$$y^7 = x(x-1)^2.$$

$\mathcal{C}_1$ を R_1 に対応する Jacobi 多様体 J_1 の canonical polarization，$\mathcal{C}_2$ を R_2 に対応する Jacobi 多様体 J_2 の canonical polarization とする．$\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_2$ によって誘起される polarization を $\widetilde{\mathcal{C}}$ とする

とき, $\tilde{A} = J_1 \times J_2$ とおくならば

$$\mathcal{P} = (\tilde{A}, \tilde{C}, \theta_1 \times \theta_2)$$

は型 $\{K, \Phi, \rho\}$ の偏極 abel 多様体である. これは Jacobi 多様体ではあり得ない. なぜなら canonically polarized Jacobi 多様体は canonically polarized Jacobi 多様体の積に同型ではあり得ないからである. 従って $\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}_0$ に外ならない.

§5 $\mathbb{Q}(\zeta)$ 係数の homology basis の具体的な表示について考察する.

例: Riemann 面の族 $\Omega(0, 7, \{1, 1, 1, 2\})$ に所属の Riemann 面は種数 6 で方程式

$$y^7 = x(x-1)(x-z)$$

で与えられる. その第 1 種微分の 1 つの基底は

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^6}, \quad \omega_2 = \frac{x\,dx}{y^6}, \quad \omega_3 = \frac{dx}{y^5}, \quad \omega_4 = \frac{x\,dx}{y^5}$$

$$\omega_5 = \frac{dx}{y^4}, \quad \omega_6 = \frac{dx}{y^3}$$

で与えられる.

x_0 を x 球面上の $0, 1, z, \infty$ と異なる任意の一点とする. x_0 と $0, 1, z, \infty$ とを互に交わらない曲線で結ぶことができる. その曲線を順次に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする (Fig. 1). y の分枝をきめてそれを y_1 とする. y のすべての分枝は

$y_1 = y_1, \quad y_2 = \zeta y_1, \quad \cdots, \quad y_7 = \zeta^6 y_1$

と表わされる。y_1 として α を走ったときの ω_6 の積分の値を α_{11} とする。それぞれの分枝に対する積分の値は

$\alpha_{11}, \; \alpha_{12}, \; \cdots, \; \alpha_{17}$

で与えられる。すなわち，

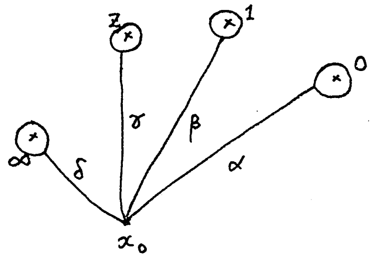

Fig. 1

$$\alpha_{11} = \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y_1^3} - \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{(\zeta y_1)^3} = (1-\zeta^4) \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y_1^3}$$

$$\alpha_{12} = \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{(\zeta y_1)^3} - \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{(\zeta^2 y_1)^3} = \zeta^4 (1-\zeta^4) \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y_1^3}$$

$$\alpha_{13} = \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{(\zeta^2 y_1)^3} - \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{(\zeta^3 y_1)^3} = \zeta (1-\zeta^4) \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y_1^3}$$

$$\alpha_{14} = \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{(\zeta^3 y_1)^3} - \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{(\zeta^4 y_1)^3} = \zeta^5 (1-\zeta^4) \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y_1^3}$$

$$\alpha_{15} = \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{(\zeta^4 y_1)^3} - \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{(\zeta^5 y_1)^3} = \zeta^2 (1-\zeta^4) \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y_1^3}$$

$$\alpha_{16} = \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{(\zeta^5 y_1)^3} - \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{(\zeta^6 y_1)^3} = \zeta^6 (1-\zeta^4) \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y_1^3}$$

同様な等式が $\beta_{11}, \cdots, \beta_{16}$ に対しても $\gamma_{11}, \cdots, \gamma_{16}$ に対しても成り立つ。$\alpha_{11} - \beta_{11} = \Omega_{11}$，$\beta_{11} - \gamma_{11} = \Omega_{12}$ とおくとき，

$$(\delta)\quad \begin{array}{ll}
\alpha_{11}-\beta_{11}=\Omega_{11}, & \beta_{11}-\gamma_{11}=\Omega_{12} \\
\alpha_{12}-\beta_{12}=\zeta^4\Omega_{11}, & \beta_{12}-\gamma_{12}=\zeta^4\Omega_{12} \\
\alpha_{13}-\beta_{13}=\zeta\Omega_{11}, & \beta_{13}-\gamma_{13}=\zeta\Omega_{12} \\
\alpha_{14}-\beta_{14}=\zeta^5\Omega_{11}, & \beta_{14}-\gamma_{14}=\zeta^5\Omega_{12} \\
\alpha_{15}-\beta_{15}=\zeta^2\Omega_{11}, & \beta_{15}-\gamma_{15}=\zeta^2\Omega_{12} \\
\alpha_{16}-\beta_{16}=\zeta^6\Omega_{11}, & \beta_{16}-\gamma_{16}=\zeta^6\Omega_{12}.
\end{array}$$

これらの周期は第1種微分 ω_6 の積分に対する1つの周期系をなすことを証明しよう。そのためには x_0 から出発して x_0 にもどるところの，Riemann 面上の任意の閉曲線に対する ω_6 の積分が上記の表にかかげたものの整係数の1次結合で表わされることを証明しさえすればよい。いま，A, B, Γ をそれぞれ α, β, γ, 中のどれか1つとするとき

$$\begin{array}{l}
\delta_{11}+A_{15}+B_{16}+\Gamma_{17}=0, \\
\delta_{12}+A_{16}+B_{17}+\Gamma_{11}=0, \\
\delta_{13}+A_{17}+B_{11}+\Gamma_{12}=0, \\
\delta_{14}+A_{11}+B_{12}+\Gamma_{13}=0, \\
\delta_{15}+A_{12}+B_{13}+\Gamma_{14}=0, \\
\delta_{16}+A_{13}+B_{14}+\Gamma_{15}=0, \\
\delta_{17}+A_{14}+B_{15}+\Gamma_{16}=0
\end{array}$$

が成り立つ。従って無限遠点を廻る道 δ の積分は A, B, Γ でおきかえることができる。それゆえ，Riemann 面上の任意の閉

曲線に沿う ω_6 の周期は $\Delta, E, Z, H, \Theta, K, \Gamma$ を α, β, γ のうちのどれか1つであるとするとき,

$$\Delta_{11}+E_{12}+Z_{13}+H_{14}+\Theta_{15}+K_{16}+\Gamma_{17}$$

と表わされるとしてよい. 従って

$$\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}=0$$

を考慮すればその周期は系(S)の整係数の1次結合で表わされることがわかる.

以上のことはつぎのようにも考えることができる. Riemann 面上の任意の閉曲線を

$$n_1\alpha+n_2\beta+n_3\gamma$$

とすることができる. ただし, $n_1+n_2+n_3\equiv 0 \pmod 7$. それゆえ, これは

$$n_1\alpha-n_1\beta+(n_2+n_1)\beta-(n_2+n_1)\gamma+(n_1+n_2+n_3)\gamma$$

と表わすことができる. これは

$$\alpha-\beta, \quad \beta-\gamma$$

が求める基底であることを示すものである.

この事実はつぎのように一般化される:

定理5 Riemann 面の族 $\Omega(0, n, \{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\})$ に所属の Riemann 面は種数 $n-1$ で方程式

$$y^n = x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-z)^{m_3} \qquad n \nmid (m_1+m_2+m_3)$$

で与えられる. ここに, $m_1\nu_1\equiv 1$, $m_2\nu_2\equiv 1$, $m_3\nu_3$ [redacted] そして

$(m_1+m_2+m_3)\nu_4+1\equiv 0 \pmod{n}$ とする.

この Riemann 面を x-球面上の分岐被覆面とみるとき, 道 $\nu_1\alpha-\nu_2\beta$ に Riemann 面上のある閉曲線 Z_1 が対応する. また道 $\nu_2\beta-\nu_3\gamma$ に Riemann 面上のある閉曲線 Z_2 が対応する. そのとき, 才1種微分 ω の周期に対しこの2つの閉曲線から生ずる周期が $Q(\zeta)$ 上の基本周期系をなす.

証明. Z_1, Z_2 が周期系の $Q(\zeta)$ 上の基底であることを示す. Riemann 面上の任意の閉曲線を

$$n_1\alpha+n_2\beta+n_3\gamma$$

とすることができる. ただし

$$n_1m_1+n_2m_2+n_3m_3\equiv 0 \pmod{n}.$$

ところで, 仮定から

$$m_1\nu_1\equiv 1,\quad m_2\nu_2\equiv 1,\quad m_3\nu_3\equiv 1.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}
&n_1\alpha+n_2\beta+n_3\gamma\\
&\equiv n_1m_1\nu_1\alpha+n_2m_2\nu_2\beta+n_3m_3\nu_3\gamma\\
&= n_1m_1(\nu_1\alpha-\nu_2\beta)+(n_1m_1+n_2m_2)(\nu_2\beta-\nu_3\gamma)\\
&\quad+(n_1m_1+n_2m_2+n_3m_3)\nu_3\gamma\\
&\equiv n_1m_1(\nu_1\alpha-\nu_2\beta)+(n_1m_1+n_2m_2)(\nu_2\beta-\nu_3\gamma)
\end{aligned}$$

これは, $\nu_1\alpha-\nu_2\beta$, $\nu_2\beta-\nu_3\gamma$ が $Q(\zeta)$ 上の基本周期系の基底をなすことを示すものである.

§6　parameter τ の解析性について考察しよう．関数方程式

$$(1)\qquad \theta(s+1)=\theta(s)$$

$$(2)\qquad \theta(s+\tau)=e^{-2\pi i s-\pi i\tau}\,\theta(s)$$

を満足する整関数 $\theta(s)$ が s に独立な乗法因子を除いて一意的にきまる．その関数は

$$\theta(s,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i n^2\tau+2\pi i n s}$$

と表わされる．この関数を Jacobi の Theta 関数という．

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(s,\tau)=\theta(s,\tau)=\vartheta_3(v,q)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}(s,\tau)=\theta\left(s+\tfrac{1}{2},\tau\right)=\vartheta_0(v,q)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}(s,\tau)=i e^{s+\frac{\tau}{4}}\,\theta\left(s+\tfrac{\tau}{2}+\tfrac{1}{2},\tau\right)=-\vartheta_1(v,q)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}(s,\tau)=e^{s+\frac{\tau}{4}}\,\theta\left(s+\tfrac{\tau}{2},\tau\right)=\vartheta_2(v,q)$$

右辺はいわゆる Jacobi の記法である．いま種数 1 の Riemann 面の方程式を Weierstrass の標準形で

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3\ ,\qquad g_2^3-27g_3^2\neq 0$$
$$=4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$$

と表わすならば，いわゆる λ 関数は

$$\lambda(\tau)=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4$$

と表わされる．いま，$R(z)$ を $y^n = x(x-1)(x-z)$ で定義された Riemann 面とする．$R(z)$ の才1種微分の基底は既に知っているように，

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^{n-1}},\ \omega_2 = \frac{dx}{y^{n-2}},\ \cdots,\ \omega_{n-\ell-1} = \frac{dx}{y^{\ell+1}};$$

$$\omega_{n-\ell} = \frac{x\,dx}{y^{n-\ell}},\ \cdots,\ \omega_{n-1} = \frac{x\,dx}{y^{n-1}}$$

と置くことができる．ここに $\frac{n-1}{3} \geqq \ell > \frac{n-4}{3}$，そして $n-\ell-2 = \ell+2k-1$．つぎの補題が成り立つ：

Lemma 4　$x=0,\ 1,\ z,\ \infty$ の上にある $R(z)$ の点をそれぞれ $q_0,\ q_1,\ q_z,\ q_\infty$ とするとき，g 次の整因子

$$D = q_0^{n_1}\, q_1^{n_2}$$

は general である．ここに $n_1 = \ell+2k$，$n_2 = \ell$．

証明　周知の定理［8］により行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)_{q_0} & \cdots & \left(\frac{d\omega_g}{dt}\right)_{q_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{d^{n_1}\omega_1}{dt^{n_1}}\right)_{q_0} & \cdots & \left(\frac{d^{n_1}\omega_g}{dt^{n_1}}\right)_{q_0} \\ \left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)_{q_1} & \cdots & \left(\frac{d\omega_g}{dt}\right)_{q_1} \\ \vdots & & \\ \left(\frac{d^{n_2}\omega_1}{dt^{n_2}}\right)_{q_1} & \cdots & \left(\frac{d^{n_2}\omega_g}{dt^{n_2}}\right)_{q_1} \end{vmatrix}$$

が零でないことを示せばよい。$\mathfrak{p}_0$ において

$$y=t, \quad x=t^n(a_0+a_1t+\cdots), \quad a_0\neq 0$$

$\mathfrak{p}_1$ において

$$y=t, \quad x-1=t^n(b_0+b_1t+\cdots), \quad b_0\neq 0$$

とおくとき簡単な計算から

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
na_0 & & & & & & & \\
* & na_0 & & & & & & \\
* & * & n2!a_0 & & & 0 & & \\
\cdots & & & & & & & \\
* & & * & n(l+2k-1)!a_0 & & & & \\
nb_0 & \cdots & * & * & nb_0 & & & \\
* & \cdots & & \cdots & * & nb_0 & & \\
* & \cdots & \cdots & & * & * & n2!b_0 & \\
\cdots & & \cdots & & & \cdots & & \\
* & \cdots & & & & & * & n(l-1)!b_0
\end{array}\right| \neq 0$$

Lemma 5 [8] $f(\mathfrak{p})$ を代数関数体 K における non constant な関数で

$$(f)=\frac{\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_m}{\mathfrak{b}_1\cdots\mathfrak{b}_m}$$

とする。積分路を適当に選ぶとき

$$\sum_{k=1}^{m} w(\mathfrak{a}_k)=\sum_{k=1}^{m} w(\mathfrak{b}_k)$$

としてよい。$\mathfrak{c}_1,\cdots,\mathfrak{c}_g$ を $\mathfrak{b}_1,\cdots,\mathfrak{b}_m$ と異なり、因子

$$D=\mathfrak{c}_1\cdots\mathfrak{c}_g$$

が general であるならば、つぎの公式が成り立つ：

$$f(\mathfrak{p}_1)\cdots f(\mathfrak{p}_g) = \gamma \prod_{k=1}^{m} \frac{\theta\left(\sum_{j=1}^{g} w(\mathfrak{p}_j) - w(a_k) - C\right)}{\theta\left(\sum_{j=1}^{g} w(\mathfrak{p}_j) - w(b_k) - C\right)} .$$

ここに γ は $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_g$ に依存しない量，$w(P)$ は第1種微分の積分. C は任意の第1種微分の零点を $q_1, \cdots, q_{2g-2}$ とするとき

$$2C \equiv \sum_{i=1}^{2g-2} w(q_i)$$

と表わされる量である. なお，

$$\prod_{k=1}^{m} \theta\left(\sum_{j=1}^{g} w(\mathfrak{p}_j) - w(b_k) - C\right)$$

は $D = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_g$ が general であるから恒等的には零とならない.

いま関数 $f(P)$ として

$$f(P) = 1 - x \quad , \quad P = (x, y)$$

とおく. $f(P)$ の零点は q_1^{n} ，$f(P)$ の極は q_∞^{n} . 補題4から因子

$$D_1 = q_0^{n_1} q_1^{n_2} \quad , \quad D_2 = q_0^{n_1} q_2^{n_2}$$

は共に general である. 補題 5 から

$$(f(q_0))^{n_1} (f(q_1))^{n_2} = \gamma \prod^{n} \frac{\theta(n_1 w(q_0) + n_2 w(q_1) - w(q_1) - C)}{\theta(n_1 w(q_0) + n_2 w(q_1) - w(q_\infty) - C)} ,$$

$$(f(q_0))^{n_1} (f(q_2))^{n_2} = \gamma \prod^{n} \frac{\theta(n_1 w(q_0) + n_2 w(q_2) - w(q_1) - C)}{\theta(n_1 w(q_0) + n_2 w(q_2) - w(q_\infty) - C)} .$$

をうる. $f(\mathfrak{q}_0)=1$, $f(\mathfrak{q}_1)=0$ そして $f(\mathfrak{q}_2)=1-z$ である. そして

$D=\mathfrak{q}_0^{n_1}\mathfrak{q}^{n_2}$ が general であるような $\mathfrak{q}$ をとるとき

$$\gamma=\lim_{\mathfrak{q}\to\mathfrak{q}_1}\frac{(f(\mathfrak{q}))^{n_2}}{\left[\dfrac{\theta(n_1w(\mathfrak{q}_0)+n_2w(\mathfrak{q})-w(\mathfrak{q}_1)-C)}{\theta(n_2w(\mathfrak{q}_0)+n_2w(\mathfrak{q})-w(\mathfrak{q}_\infty)-C)}\right]^n}$$

をうる. ところで,

$$2C\equiv\sum_{i=1}^{2g-2}w(\mathfrak{y}_i)$$

において $\mathfrak{y}_1,\cdots,\mathfrak{y}_{2g-2}$ は $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ $\mathfrak{q}_\infty$ 以外の点はないとしてよい. なお,

$$\frac{\theta(n_1w(\mathfrak{q}_0)+n_2w(\mathfrak{q}_1)-w(\mathfrak{q}_1)-C)}{\theta(n_1w(\mathfrak{q}_0)+n_2w(\mathfrak{q}_1)-w(\mathfrak{q}_\infty)-C)}$$

ならびに

$$\frac{\theta(n_1w(\mathfrak{q}_0)+n_2w(\mathfrak{q}_2)-w(\mathfrak{q}_1)-C)}{\theta(n_1w(\mathfrak{q}_0)+n_2w(\mathfrak{q}_2)-w(\mathfrak{q}_\infty)-C)}$$

において, θ の記号の下では

$$z_1=\alpha-\beta,\quad z_2=\beta-\gamma$$

に関する周期のみで表わされる. 従ってつぎの定理を得る:

定理 6. 記号と仮定を上記の通りとするとき

$$(1-z)^{\ell}=\gamma\prod^{n}\frac{\theta(n_1w(\mathfrak{q}_0)+n_2w(\mathfrak{q}_2)-w(\mathfrak{q}_1)-C)}{\theta(n_1w(\mathfrak{q}_0)+n_2w(\mathfrak{q}_2)-w(\mathfrak{q}_\infty)-C)}$$

は $\mathcal{H}/\Gamma$ の部分空間で定義され, そこで一価な関数である.

参 考 文 献

[0] L. Bieberbach : Theorie der gewöhnlich Differential Gleichungen, Springer-Verlag (1965)

[1] A. Kuribayashi : On analytic families of compact Riemann surfaces with non-trivial automorphisms Nagoya Math. Journal 28 (1966)

[2] ———— : On some properties of abelian varieties Chuo Univ. 9. (1966)

[3] ———— : On the moduli of Riemann surfaces attached to certain hypergeometric equations. Chuo Univ. 10. (1967)

[4] A. Kuribayashi & E. Sekita : On certain hypergeometric differential equations. Chuo Univ. 11. (1968)

[5] E. Picard. : Traité d'analyse t. II, III Paris, (1908)

[6] G. Shimura : On analytic families of polarized abelian varieties. Ann. of Math. (1963)

[7] ———— : On purely transcendental fields of functions of several variables, Osaka J. Math. (1964)

[8] C.L. Siegel : Ausgewählte Fragen der Funktionentheorie I. II. (1953 / 1954)