数理解析研究所講究録
第196巻 1973年 111-114

解が代数函数となる微分方程式について.

都立大・理学部　松元　竟

(I)

任意の解が代数函数になる微分方程式のモノドロミー群は有限群であり，有限群をモノドロミーにもつような方程式の解は代数函数である。そこで，具体的に有限群を与えたときその群をモノドロミー群にもつ方程式が具体的に計算できるかを考える．計算に使う道具は，有限群に対する不変式と，射影変換で不変な微分式である。

(II)

Gを$(x_1, \cdots, x_n)$の上に作用する有限な一次変換群とする. $S \in G$により，x_jは$x_j^{(S)}$にうつるものとする。$x_1, \cdots, x_n$の有理函数$f(x_1, \cdots, x_n)$が，任意の$S \in G$について

$$f(x_1, \cdots, x_n) \equiv f(x_1^{(S)}, \cdots, x_n^{(S)})$$

をみたすき，fのGの不変式(algebraic invariant)という.

[注] 1. 上のようなfは必ず存在する。

2. Gの不変式で代数的に独立なものはn個ある。

3、代数的に独立な不変式を $f_1, \cdots, f_n$ とするとき，
他の不変式はこれらを使って代数的に書ける。

(III)

$\mathbb{P}(\mathbb{C})$ の変換で不変な微分式は，シュワルツの微分（Schwarzean derivative）

$$[S]_t = \frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2}\left(\frac{S''}{S'}\right)^2 \quad , \quad {}' = \frac{d}{dt} \tag{1}$$

である。

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の変換

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_1X + b_1Y + c_1}{aX + bY + c} \\ y = \dfrac{a_2X + b_2Y + c_2}{aX + bY + c} \end{cases} \tag{2}$$

で不変な微分式は，

$$D = \begin{vmatrix} X' & X'' \\ Y' & Y'' \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} X' & X''' \\ Y' & Y''' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} X' & X^{IV} \\ Y' & Y^{IV} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} X'' & X''' \\ Y'' & Y''' \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} X'' & X^{IV} \\ Y'' & Y^{IV} \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} X''' & X^{IV} \\ Y''' & Y^{IV} \end{vmatrix}$$

として，

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{4D_1^2 - 3D(D_2 + 2D_3)}{D^2} \\ I_2 = \dfrac{6DD_1(D_2 + 4D_3) - 8D_1^3 - 9D^2D_4}{D^3} \end{cases} \tag{3}$$

である。

(IV).

3 階線形方程式

(4) $y''' + 3ay'' + 3by' + cy = 0$ （a, b, c は x の有理函数）

の一次独立解を y_1, y_2, y_3 とし，$X = \dfrac{y_1}{y_3}$，$Y = \dfrac{y_2}{y_3}$ とおいて

I_1, I_2 を計算すれば

(5) $$\begin{cases} I_1 = 9(a^2 + a' - b) \\ I_2 = 27\{2a(a^2 + a') - 3ab - b' + c\} \end{cases}$$

となる。さらに

(6) $(y_3^3 d)' + 3a y_3^3 d = 0$

から

(7) $y_3 = e^{-\int a\,dx} \cdot D^{-\frac{1}{3}}$

を得る。

Prop. (4) の解が代数函数 $\Longleftrightarrow$ (5) の解が代数函数

例.

群の生成元が

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix} \qquad \rho^n = 1$$

で与えられるとき，不変式は，x, y を変数として，

$$xy, \quad x^n + y^n, \quad (x^n - y^n)^2$$

t を独立変数として

$$t = \left(\frac{x^n + y^n}{x^n - y^n} \right)^2$$

$\frac{x}{y} = w$ とおくと

$$t = \left(\frac{w^n + 1}{w^n - 1} \right)^2$$

これから

$$\left(\frac{w'}{w} \right)^2 = \frac{1}{n^2 t (t-1)^2}$$

対数微分して

$$\frac{w''}{w'} - \frac{w'}{w} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t-1} \right) \qquad ①$$

①の両辺を微分

$$\frac{w'''}{w'} - \left(\frac{w''}{w'} \right)^2 - \frac{w''}{w} + \left(\frac{w'}{w} \right)^2 = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t^2} - \frac{2}{(t-1)^2} \right) \qquad ②$$

$$①^2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) + ②$$

$$[w]_t + \frac{1}{2} \left(\frac{w'}{w} \right)^2 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t-1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t^2} - \frac{2}{(t-1)^2} \right)$$