数理解析研究所講究録
第 197 巻 1974 年 48-59

Wilcoxon two sample statistic に基づく Hodges-Lehmann 推定量の漸近的表現について

統計数理研究所　　稲垣　宣生

§1. Sample quantile の表現

$X_1, X_2, \cdots, X_m, \cdots$ を独立，同一分布に従う標本とする。その分布関数 $F(x)$ は，ある p $(0<p<1)$ に対する population p-th quantile $\theta_{(p)}$ （すなわち，$F(\theta_{(p)})=p$）の近傍において，2回微分可能で $F'(\theta_{(p)})>0$，（$F'=f$ とおけば，$f(\theta_{(p)})>0$）$F''(x)$ はその近傍で有界とする。標本 $X_1, \cdots, X_m$ の Sample p-th quantile を $\hat{\theta}_{m(p)} = \hat{\theta}_{m(p)}(X_1, \cdots, X_m)$ とし，経験分布関数を $F_m^x(x)$ とする。$\delta(x)=1$ if $x \geqq 0$，$=0$ if $x<0$ なる関数を用いると，$F_m^x(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \delta(x-X_j)$ である。また、$F_m^x(\hat{\theta}_{m(p)}-) \leqq p \leqq F_m^x(\hat{\theta}_{m(p)})$ が成り立っている。

Bahadur [1] は Sample p-th quantile $\hat{\theta}_{m(p)}$ が経験分布関数 F_m^x を使って次のように漸近的表現されることを示した：

$$(1) \qquad \hat{\theta}_{m(p)} = \theta_{(p)} + [p - F_m^x(\theta_{(p)})]/f(\theta_{(p)}) + R_m(p)$$

とおくとき，

(2) $\quad R_m(p) = O\left(m^{-\frac{3}{4}}(\log m)^{\frac{1}{2}}(\log\log m)^{\frac{1}{4}}\right)$ as $m\to\infty$

with probability one. このことから、更に、

(3) $$\varlimsup_{m\to\infty}\left[m^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_{m(p)}-\theta_{(p)})/(2\log\log m)^{\frac{1}{2}}\right] = \left[p(1-p)/f^2(\theta_{(p)})\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$\varliminf_{m\to\infty}\left[m^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_{m(p)}-\theta_{(p)})/(2\log\log m)^{\frac{1}{2}}\right] = -\left[p(1-p)/f^2(\theta_{(p)})\right]^{\frac{1}{2}}$$

with probability one.

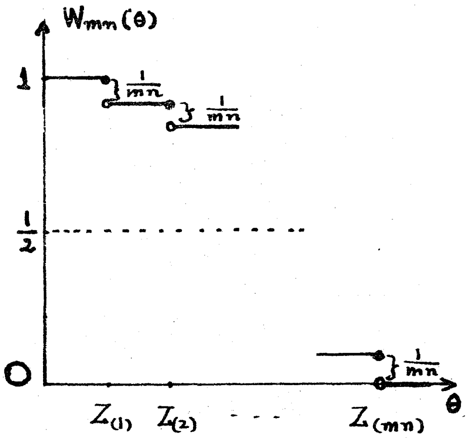
その後 Kiefer [2] によって (2)式の O の正確な評価がなされた。また Kiefer [3] による $p_m \searrow 0$ の場合の拡張や Sen [6] による $\{X_m; -\infty<m<\infty\}$ が ϕ- mixing dependent r.v. の系列の場合の拡張等がなされている。古くは丘本氏[5]が同様の結果(in probability の意味で)を示されている。

我々はここで Wilcoxon two sample statistic によって、それに基づく Hodges-Lehmann (H-L) 推定量が同様の漸近的表現をされることを示そう。

§2. Wilcoxon two sample statistic に基づく Hodges-Lehmann 推定量の表現

$X_1,\cdots,X_m,\cdots; Y_1,\cdots,Y_n,\cdots$ は互に独立な2組の標本であって、それぞれ分布関数 $F(x)$, $F(x-\theta_0)$, $(-\infty<\theta_0<\infty)$ に従っているとする。2標本 $X_1,\cdots,X_m; Y_1,\cdots,Y_n$ の Wilcoxon statistic (普通、以下において $\theta=0$ 場合を言う):

(4) $$W_{m,n}(\theta) = \frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\delta(Y_k-X_j-\theta)$$



はX標本の経験分布関数を使えば,

(5) $W_{mn}(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F_m^x(Y_k-\theta)$

とも書ける。$W_{mn}(\theta)$ は θ の非増加関数で, $W_{mn}(-\infty)=1$, $W_{mn}(\infty)=0$.

$Z_{jk}=Y_k-X_j$, $j=1,\cdots,m$; $k=1,\cdots,n$ とおき, その順序統計量を $Z_{(1)}<Z_{(2)}<\cdots<Z_{(mn)}$ とする。

(6) $E[W_{mn}(\theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(y-\theta)\,dF(y-\theta_0) = \mu(\theta)$ とおく.

このとき, とくに $\mu(\theta_0)=\frac{1}{2}$ である。したがって, Wilcoxon statisticに基づく θ_0 の H-L推定量 $\hat{\theta}_{mn}$ は,

$$\theta^{*}=\sup\{\theta;\ W_{mn}(\theta)>\tfrac{1}{2}\},\quad \theta^{**}=\inf\{\theta;\ W_{mn}(\theta)<\tfrac{1}{2}\}$$

とおけば, $0\leq\alpha\leq1$ として (上図参照)

(7) $\hat{\theta}_{mn} = \mathrm{median}\{Z_{jk};\ j=1,\cdots,m,\ k=1,\cdots,n\} = \alpha\theta^{*}+(1-\alpha)\theta^{**}$.

すなわち

(8) $W_{mn}(\hat{\theta}_{mn}+) \leq \frac{1}{2} \leq W_{mn}(\hat{\theta}_{mn})$.

次の定理は, §1 におけるSample quantileと経験分布の関係を, H-L推定量 $\hat{\theta}_{mn}$ とWilcoxon statisticの関係におきかえることが出来ることを意味している。

Theorem

(a) 分布関数Fは2次までの微分 $F'=f$, $F''=f'$ をもち、それぞれは有界である。(b) $N=m+n$ とおくとき,

$m/N \to \lambda$ $(0<\lambda<1)$, as $N\to\infty$. 仮定(a), (b)の下で,

(9) $\hat{\theta}_{mn} = \theta_0 + \Gamma^{-1}[W_{mn}(\theta_0) - \frac{1}{2}] + R_{mn}$

$$但し, \Gamma = \int_{-\infty}^{\infty}\{f(x)\}^2 dx$$

とおけば,

(10) $R_{mn} = O(N^{-\frac{3}{4}}(\log N)^{\frac{1}{2}}(\log\log N)^{\frac{1}{4}})$, as $N\to\infty$,

with probability one. 更にこのことから,

(11)
$$\limsup_{N\to\infty} [N^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_{mn}-\theta_0)/(2\log\log N)^{\frac{1}{2}}] = [12\lambda(1-\lambda)\Gamma]^{-\frac{1}{2}},$$
$$\liminf_{N\to\infty} [N^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_{mn}-\theta_0)/(2\log\log N)^{\frac{1}{2}}] = -[12\lambda(1-\lambda)\Gamma]^{-\frac{1}{2}},$$

with probability one.

§3. Some lemmas.

C_1, C_2 をあとで適当に選ぶ正定数とする。$\{a_N\}, \{b_N\}$, $\{\gamma_N\}$ を次のような定数列とする: as $N\to\infty$,

(12)
$$a_N \sim C_1 N^{-\frac{1}{2}}(\log\log N)^{\frac{1}{2}}, \quad b_N \sim N^{\frac{1}{4}}, \text{ and}$$
$$\gamma_N \sim C_2 N^{-\frac{3}{4}}(\log N)^{\frac{1}{2}}(\log\log N)^{\frac{1}{4}}.$$

その中心点が y $(-\infty<y<\infty)$ である区間

(13) $I_N(y) = (-a_N+y,\ y+a_N)$

に対し、その区間の分点: $\eta_{r,N}(y) = y + a_N b_N^{-1}\cdot r$, r は整数で $-b_N \leq r \leq b_N$, を考える。

(14)
$$G_m(x,y) = [F_m^X(x) - F_m^X(y)] - [F(x)-F(y)],$$
$$H_N(y) = \sup\{|G_m(x,y)|;\ x\in I_N(y)\},$$

とおくと，経験分布関数の単調性によって，$x \in [\eta_{rN}(y), \eta_{r+1,N}(y)]$ に対し，

$$G_m(x,y) \leqq [F^x_m(\eta_{r+1,N}(y)) - F^x_m(y)] - [F(\eta_{rN}(y)) - F(y)]$$
$$= G_m(\eta_{r+1N}(y), y) + F(\eta_{r+1N}(y)) - F(\eta_{rN}(y)),$$

同様に

$$G_m(x,y) \geqq G_m(\eta_{rN}(y), y) - [F(\eta_{r+1N}(y)) - F(\eta_{rN}(y))].$$

ゆえに

(15) $$H_N(y) \leqq \max\{|G_m(\eta_{rN}(y), y)|; -l_N \leqq r \leqq l_N\}$$
$$+ \max\{F(\eta_{r+1N}(y)) - F(\eta_{rN}(y)); -l_N \leqq r \leqq l_N\}$$

右辺をそれぞれ $= H^*_N(y) + \beta_N(y)$ とおく．

$|f(x)| \leqq M$, for $-\infty < x < \infty$ と仮定すれば，$F(\eta_{r+1N}(y)) - F(\eta_{rN}(y)) \leqq M \cdot a_N l_N^{-1}$ であるから

(16) $$\beta_N(y) \leqq M a_N l_N^{-1} \quad (y \text{に無関係}).$$

さて $U_1, \cdots, U_m$ は独立な r.v.'s であり，定数 c で一様有界であるとする。$EU_i = 0$, $EU_i^2 = \sigma_i^2$, $i = 1, \cdots, m$ で，$s_m^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_m^2$ とすれば，Bernstein's inequality：

(17) $$P\{|U_1 + \cdots + U_m| \geqq t\} \leqq 2\exp\{-t^2/[2s_m^2 + \tfrac{2}{3}ct]\}$$

が成り立つ（see Uspensky [7] p 204–206）．それ故，成功の確率が p である m 回 Bernoulli 試行の成功の数を $B(m, p)$ で表わすと，Bernstein's inequality は $c = 1$, $s_m^2 = mp(1-p)$ として

(18) $$P\{|B(m,p) - mp| \geqq t\} \leqq 2\exp\{-t^2/[2mp(1-p) + \tfrac{2}{3}t]\}.$$

ところが $|G_m(\eta_{rN}(y), y)|$ は成功の確率 $p_{r,N} = |F(\eta_{rN}(y)) - F(y)|$ として $m^{-1}|B(m, p_{rN}) - m p_{rN}|$ と分布が同じである。(18) 式で $t = m\gamma_N$ とし、$p_{rN} \leqq M \cdot a_N$ に注意すれば、

$$P\{|G_m(\eta_{rN}(y), y)| \geqq \gamma_N\} \leqq 2\exp\{-(m\gamma_N)^2/[2m \cdot M a_N + \tfrac{2}{3} m\gamma_N]\}.$$

この右辺は y に無関係であるから

$$(19) \quad P\{H_N^*(y) \geqq \gamma_N\} \leqq \sum_{-l_N \leqq r \leqq l_N} P\{|G_m(\eta_{rN}(y), y)| \geqq \gamma_N\}$$
$$\leqq 4 l_N \exp\{-(m\gamma_N)^2/[2mMa_N + \tfrac{2}{3} m\gamma_N]\} = \rho_N \text{ とおく.}$$

ここで ρ_N は y に無関係である。以上 Bahadur [1] Lemma 1 の証明の要所を (16), (19) 式の上界 $Ma_N l_N^{-1}$, ρ_N がそれぞれ y $(-\infty < y < \infty)$ に無関係にとれることを注意しながらくり返し挙げた。これより次の Lemma を得る。

Lemma 1.

Theorem と同じ仮定の下で、

$$(20) \quad K_N = \sup\{|[W_{mn}(\theta) - W_{mn}(\theta_0)] + \Gamma \cdot (\theta - \theta_0)|\ ;\ \theta \in I_N(\theta_0)\} \text{ とおくと}$$
$$= O\left(N^{-\frac{3}{4}} (\log N)^{\frac{1}{2}} (\log\log N)^{\frac{1}{4}}\right), \quad \text{as } N \to \infty,$$

with probability one.

Proof.

仮定 (a) から、$|f(x)|, |f'(x)| \leqq M$ for $-\infty < x < \infty$ とする。(5), (14) 式から

$$[W_{mn}(\theta) - W_{mn}(\theta_0)] + \Gamma \cdot (\theta - \theta_0)$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \{[F_m^*(Y_k - \theta) - F_m^*(Y_k - \theta_0)] - [F(Y_k - \theta) - F(Y_k - \theta_0)]\}$$

$$+\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[F(Y_k-\theta)-F(Y_k-\theta_0)\right]+\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x)\}^2dx\cdot(\theta-\theta_0)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}G_m(Y_k-\theta,Y_k-\theta_0)$$

$$+\left\{\left[\frac{-1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(Y_k-\theta_0)+\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x)\}^2dx\right](\theta-\theta_0)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f'(\tilde{Y}_k)\cdot\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2}\right\}$$

(14), (15), (16), (20) 式と仮定から

(21) $$K_N\leqslant\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}H_N^*(Y_k-\theta_0)+Ma_N e_N^{-1}\right\}$$
$$+\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(Y_k-\theta_0)-\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x)\}^2dx\right|\cdot a_N+\frac{M}{2}\cdot a_N^2\right\}.$$

(12) 式から，as $N\to\infty$,

(22) $$M\cdot a_N e_N^{-1}\sim M\cdot c_1 N^{-\frac{3}{4}}(\log\log N)^{\frac{1}{2}} \text{ and } \frac{M}{2}\cdot a_N^2\sim\frac{M}{2}\cdot c_1^2 N^{-1}\log\log N.$$

Bounded r.v's に関する *Law of the iterated logarithm* (see Loève [4] p 260) と (12) 式によって，

(23) $$a_N\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(Y_k-\theta_0)-\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x)\}^2dx\right|=O(N^{-1}(\log\log N)^{+1}),\ \text{as } N\to\infty$$

with probability one．(19) 式から

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}E_Y\{P[H_N^*(Y_k-\theta_0)\geqslant\gamma_N|Y]\}$$

(24) $$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}H_N^*(Y_k-\theta_0)\geqslant\gamma_N\right\}\leqslant\sum_{k=1}^{n}P\{H_N^*(Y_k-\theta_0)\geqslant\gamma_N\}\leqslant n\rho_N.$$

仮定 (e) $m/N\to\lambda$, $n/N\to(1-\lambda)$, as $N\to\infty$ より

(25) $$\lim_{N\to\infty}\left[\log n\rho_N/\log N\right]=\frac{5}{4}-\frac{\lambda\cdot c_2^2}{2M\cdot c_1}.$$

c_1 に対して c_2 を十分大きく選べば，(25) 式の極限 <-1．

このとき $\sum_{N=1}^{\infty}P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}H_N^*(Y_k-\theta_0)\geqslant\gamma_N\right\}<\infty$ だから Borel-Cantelli Lemma から，with probability one,

(26) $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}H_N^*(Y_k-\theta_0)=O(N^{-\frac{3}{4}}(\log N)^{\frac{1}{2}}(\log\log N)^{\frac{1}{4}}),\ \text{as } N\to\infty.$$

(21), (22), (23), (26) 式から．Lemma の結論 (20) を得る。

分布関数Fが連続のときには，Wilcoxon statistic とその projection:

$$W_{mn}(\theta_0)=\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\delta(Y_k-\theta_0-X_j),\ \text{and}$$

$$W_{mn}^{*}(\theta_0)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F(Y_k-\theta_0)-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}F(X_j)+\frac{1}{2}\quad(とおく)$$

は，$X_j'=F(X_j)$, $Y_k'=F(Y_k-\theta_0)$, $j=1\cdots m$, $k=1,\cdots,n$ が一様分布$U(0,1)$からの N個の独立標本であり，又，$\delta(Y_k-\theta_0-X_j)=\delta(Y_k'-X_j')$, with prob. one，$j=1,\cdots,m$, $k=1,\cdots,n$ であるから，

$$W_{mn}=\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\delta(Y_k'-X_j')\quad,\ \text{and},$$

$$W_{mn}^{*}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k'-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}X_j'+\frac{1}{2}\quad(とおく)$$

と同じである。

Lemma 2.

Theorem の仮定(C) の下で，任意の α,$(0<\alpha<1)$ に対し

(27) $$|W_{mn}-W_{mn}^{*}|=O(N^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}),\ \text{as}\ N\to\infty,\ \text{with prob. one.}$$

Proof.

$y=(y_1,\cdots,y_n)$ に対し，$Z_j(y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\delta(y_k-X_j')-y_k+X_j'-\frac{1}{2}]$，$j=1,\cdots,m$，とおけば，$Z_1(y),\cdots,Z_m(y)$ は独立で，$E\,Z_j(y)=0$,

$$\sigma_y^2=E\{Z_j(y)\}^2=\frac{1}{n^2}\left\{\frac{n}{12}+2\sum_{k<k'}\left[\frac{1}{12}+\frac{(y_{(k)}-y_{(k')})}{2}+\frac{(y_{(k)}-y_{(k')})^2}{2}\right]\right\},$$

ここで，$y_{(k)}<y_{(k')}$ は y_k と $y_{k'}$ の小さい方と大きい方。

また $|\delta(y_k-x)-y_k+x-\frac{1}{2}|\leqq\frac{1}{2}$ であるから，$|Z_j(y)|\leqq\frac{1}{2}$。

更に，y の代りに $Y=(Y_1',\cdots,Y_n')$ をとると，

(28) $$E\,\sigma_Y^2=\frac{1}{12n},\quad E[\sigma_Y^2-\frac{1}{12n}]^2=\frac{n(n-1)}{360n^4}$$

を得る。ところで，

$$W_{mn} - W^*_{mn} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Z_j(Y)$$

であるから Bernstein's inequality (17) によって，

(29) $$P\{|W_{mn} - W^*_{mn}| \geqq t\} = E_Y\{P[|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Z_j(Y)| \geqq t \mid Y]\}$$
$$\leqq E_Y\{2\exp[-m^2t^2/(2m\sigma_Y^2 + \frac{1}{3}mt)]\}.$$

$2\exp[-mt^2/(2\sigma_Y^2 + \frac{t}{3})] \leqq 2$ であり，(18)式から

$$E\sigma_Y^4 = \frac{n(n-1)}{360n^4} + \left(\frac{1}{12n}\right)^2 = \frac{7n-2}{720n^3}$$

であるから，Tshebysheff's inequality から．

(30) $$E_Y\{2\exp[-mt^2/(2\sigma_Y^2 + \frac{1}{3}t)]\} \leqq 2\exp[-mt^2/(2\varepsilon + \frac{t}{3})]$$
$$+ 2\cdot P\{\sigma_Y^2 \geqq \varepsilon\}$$
$$\leqq 2\exp[-mt^2/(2\varepsilon + \frac{t}{3})] + 2\cdot\frac{7n-2}{720n^3}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

$0<\alpha<1$ に対し，$\alpha<\beta<1$ なる β をとり，$t = m^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}$，$\varepsilon = n^{-\frac{\beta}{2}}$

とおくと，(29)，(30) 式から

$$P\{|W_{mn} - W^*_{mn}| \geqq m^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}\} \leqq 2\exp[-m^{-\frac{\alpha}{2}}/(2n^{-\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{3}m^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}})]$$
$$+ 2\cdot\frac{7n-2}{720n^3}\cdot n^\beta = \delta_N \text{ (とおく.)},$$

$$\lim_{N\to\infty}[\log\delta_N/\log N] = \lim_{N\to\infty}[\log 2\cdot\frac{7n-2}{720n^3}\cdot n^\beta/\log N]$$
$$= -2+\beta < -1.$$

ゆえに Borel-Cantelli Lemma から，Lemma の結論 (27) を得る。

◁

projection W^*_{mn} は独立な r.v. の和であるから，仮定(C)の下で，Law of the iterated logarithm が成り立つ：

$$\limsup_{N\to\infty}[N^{\frac{1}{2}}(W^*_{mn} - \frac{1}{2})/(2\log\log N)^{\frac{1}{2}}] = [12\lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\liminf_{N\to\infty} [N^{\frac{1}{2}}(W^*_{mn}-\tfrac{1}{2})/(2\log\log N)^{\frac{1}{2}}] = -[12\lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}}$$

with probability one. Lemma 2を使うと. したがって.

Lemma 3.

Theoremの仮定(C)の下で, Wilcoxon statisticのi.l.l.:

$$(31)\quad \begin{aligned} &\limsup_{N\to\infty} [N^{\frac{1}{2}}(W_{mn}-\tfrac{1}{2})/(2\log\log N)^{\frac{1}{2}}] = [12\lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}} \\ &\liminf_{N\to\infty} [N^{\frac{1}{2}}(W_{mn}-\tfrac{1}{2})/(2\log\log N)^{\frac{1}{2}}] = -[12\lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

with probability one, が成り立つ.

Lemma 4.

Theoremと同じ仮定の下で, 定数C_1を適当に選べば, H-L推定量 $\hat{\theta}_{mn}\in I_N(\theta_0)$, for all sufficiently large N, with probability one, が成り立つ.

Proof.

$W_{mn}(\theta)$がθの単調減少関数であることから

$$(32)\quad \inf\{|W_{mn}(\theta)-\tfrac{1}{2}| ;\ \theta\notin I_N(\theta_0)\} = \min\{|W_{mn}(\theta_0-a_N)-\tfrac{1}{2}|,\ |W_{mn}(\theta_0+a_N)-\tfrac{1}{2}|\}.$$

ところが

$$|W_{mn}(\theta_0+a_N)-\tfrac{1}{2}| \geq \Gamma\cdot a_N - |W_{mn}(\theta_0+a_N)-W_{mn}(\theta_0)+\Gamma\cdot a_N| - |W_{mn}(\theta_0)-W^*_{mn}(\theta_0)| - |W^*_{mn}(\theta_0)-\tfrac{1}{2}|$$

(12)式とLemma 1, 2, 3から,

$$(33)\quad |W_{mn}(\theta_0+a_N)-\tfrac{1}{2}| \geq \Gamma\cdot C_1\cdot N^{-\frac{1}{2}}(\log\log N)^{\frac{1}{2}} - C_2 N^{-\frac{3}{4}}(\log N)^{\frac{1}{2}}(\log\log N)^{\frac{1}{4}} - N^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}} - [6\lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{2}}(\log\log N)^{\frac{1}{2}}$$

$$\geqq \{\Gamma C_1 - [6\lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon\} N^{-\frac{1}{2}}(\log\log N)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ここで } \varepsilon > 0$$

for all sufficiently large N with probability one. C_1 を大きく選べば $\{\Gamma C_1 - [6\lambda(1-\lambda)]^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon\} = A$ (とおく) > 0.

同様に for all sufficiently large N,

(34) $|W_{mn}(\theta_0 - a_N) - \frac{1}{2}| \geqq A N^{-\frac{1}{2}}(\log\log N)^{\frac{1}{2}}$, with prob. one.

(32)(33)(34)式から. for all sufficiently large N,

(35) $\inf\{|W_{mn}(\theta) - \frac{1}{2}| ; \theta \notin I_N(\theta_0)\} \geqq A N^{-\frac{1}{2}}(\log\log N)^{\frac{1}{2}}$

with probability one.

一方, (8)式から.

(36) $|W_{mn}(\hat{\theta}_{mn}) - \frac{1}{2}| \leqq \frac{1}{mn}$, with probability one,

かつ, $\frac{1}{mn} \sim \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} N^{-2}$, as $N \to \infty$. ゆえに (35), (36) 式より

$\hat{\theta}_{mn} \in I_N(\theta_0)$ for all suff. large N, with prob. one,

が成り立たねばならない。

§ 4. Proof of Theorem.

定数 C_1, C_2 を適当に選ぶことにより、Lemma 4 が成り立つから. for all sufficiently large N,

(37) $|[W_{mn}(\hat{\theta}_{mn}) - W_{mn}(\theta_0)] + \Gamma \cdot (\hat{\theta}_{mn} - \theta_0)| \leqq K_N$

with prob. one. (36), (37) と Lemma 1 から. as $N \to \infty$

$$|[\tfrac{1}{2} - W_{mn}(\theta_0)] + \Gamma \cdot (\hat{\theta}_{mn} - \theta_0)| = O(N^{-\frac{3}{4}}(\log N)^{\frac{1}{2}}(\log\log N)^{\frac{1}{4}})$$

with prob. one, すなわち (10) を得る。(10) と Lemma 3 から

(11) を得る.

REFERENCES

[1] Bahadur,R.R.(1966). A note on quantiles in large samples, Ann. Math. Statist.,37, 577-580.

[2] Kiefer,J.(1967). On Bahadur's representation of sample quantiles, Ann. Math. Statist., 38, 1323-1342.

[3] ________ (1970). Deviations between the sample quantile process and the sample df, Nonparametric Techniques in Statistical Inference (Ed: M.L.Puri), Cambridge Univ. Press, N.Y., 299-320.

[4] Loève,M.(1963). Probability Theory, Von Nostrand, Princeton.

[5] 丘本正 (1955). 順序統計量と累積度数の関係, 大阪統計談話会報告, 1, 18-19.

[6] Sen,P.K.(1972). On the Bahadur representation of sample quantiles for sequences of ϕ-mixing random variables, J. Multi-variate Analysis, 2, 77-95.

[7] Uspensky,J.V.(1937). Introduction to Mathematical Probability, McGraw-Hill, New York.