

統計量の(B)_d型漸近展開

創俣大 経 池田真雄
香川大 経 松縄 規

1. 統計量の漸近展開

確率変数 X_n が

$$X_n = Y_n + Z_n, \quad n=1, 2, \dots \quad (1.1)$$

の形に展開され、 $Z_n \rightarrow 0$ (in prob.) が成立してゐるとする。
ここで、 X_n は k 次元確率変数で、 k は n に無関係に固定されてゐるとする。もし、 X_n, Y_n が、 $X_n \sim Y_n (B)_d (n \rightarrow \infty)$ を満たせば、(1.1) は (B)_d 型の漸近展開とよんでよい。この報告では、(1.1) が (B)_d 型の漸近展開と共えるための判定条件と共える。

2. (B)_d型漸近同源性の十分条件

R と k 次元ユークリッド空間、 B を R の部分集合のつくる通常のボレル集合体とし、 $\{h_n; n=1, 2, \dots\}$ を R 上で定義された実関数列とする。 $\{A_n; n=1, 2, \dots\}$ を B に属する集合の列とする

るとき, $\{h_n\}$ が $\{A_n\}$ に関して漸近的に一様連続であるというのとは, 任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ と $N = N(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$\sup \{ |h_n(x) - h_n(x')| \mid |x - x'| < \delta, x, x' \in A_n, n \geq N \} < \varepsilon \quad (2.1)$$

が成り立つことである.

これについて次の結果が成り立つ.

補題 1. 「 $\{p_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ を \mathcal{R} から他の同じユークリッド空間への写像列とし, $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ を共に一様有界な実数列とする. $\{p_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ がともにある $\{A_n\}$ に関して漸近的に一様連続ならば, $\{\lambda_n p_n(x) + \mu_n g_n(x)\}$ も $\{A_n\}$ に関して漸近的に一様連続である。」

補題 2 「 $\{A_n\}$ を d 次元区間の列で, A_n の最短辺の長さを $\Delta(A_n)$ によって, $0 < \eta \leq \Delta(A_n)$, $n = 1, 2, \dots$ であるような実数 η が存在するとする. \mathcal{R} 上の確率変数 $\{X_{nt}\}$, $\{Y_{nt}\}$ の pdf. をそれぞれ $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ とし, これらはともに $\{A_n\}$ に関して漸近的に一様連続であると仮定すれば, 条件

$$X_n \sim Y_n \quad (M)d, \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.2)$$

は, 条件

$$\sup \{ |f_n(x) - g_n(x)| \mid x \in A_n \} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.3)$$

を含む。」

以上二つの補題から, 次のような (B)_d 型漸近同源性の判定

条件が得られる。

定理 1. 「次の条件 (i) - (iii) が同時に満たされるとする。

(i) $X_n \sim Y_n (M)_d, (n \rightarrow \infty).$

(ii) 任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し, k 次元区間列 $\{A_n\}$

と $M = M(\varepsilon) > 0$ が存在して, ある $N = N(\varepsilon) > 0$ に対して

$$\mu(A_n) < M, \text{ かつ } P^{Y_n}(A_n) > 1 - \varepsilon$$

がすべて $n \geq N$ で成り立つ。(μ はルベーグ測度)

(iii) $\{f_n, g_n\}$ は共に $\{A_n\}$ に肉して漸近的に一様連続である。
任意の $\varepsilon > 0$ に対して

このとき $X_n \sim Y_n (B)_d, (n \rightarrow \infty),$ が成り立つ。 」

実用上は次の結果が役立つと思われる。

補題 3. 「 $\{f_n(x)\}$ が $\{A_n\}$ に肉して漸的に一様連続である

ための十分条件は, 各 n について, A_n を含むある開領域

域 E_n 上で微分可能で, かつ E_n 上で $|f_n'(x)|$ が一様に有界:

$$|f_n'(x)| < M \text{ で, } M \text{ が } n \text{ に依存しないことである。 } 」$$

3. (B)_d型漸近展開の判定条件

Ikedo (1968)^{*)} に与えられているように, (1.1) に対して, 定理

1 の条件 (i) が成り立つための必要十分条件がある。

補題 4. 「(1.1) で, $Z_n \rightarrow 0$ (in prob.) であり, かつ $\{Y_n\}$ が

性質 C(S) をもつならば, $X_n \sim Y_n (M)_d$ が存在する。 」

ここで $\{Y_n\}$ が性質 $C(S)$ をもつというのは、任意の $\varepsilon > 0$ に
 対して、 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $N = N(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$\sup \{ P^{Y_n}(E) \mid \mu(E) < \delta, E \in S, n \geq N \} < \varepsilon \quad (27)$$

が成立することである。ただし、 S は k 次元区間全体の集合。

定理 1 の条件 (ii), (iii) があれば、この条件が満たれていゝことは容易に証明できる。実際の結果が成立する。

補題 5 「 $P^{Y_n}(A_n) \rightarrow 1, (n \rightarrow \infty)$, とする $\{A_n\}$ に関して、 $\{g_n\}$
 が漸近的に一様連続であれば、 $\{Y_n\}$ は $C(S)$ をもつ。」

これから、次の結果が得られる。

定理 2. 「(1.1) に対して次の条件が満たれていゝとすると、

(i) $Z_n \rightarrow 0$ (in prob.), $(n \rightarrow \infty)$.

(ii), (iii) は定理 1 と同様。

以上の条件の下で、(1.1) は $(OB)_d$ 型の漸近展開と興える。」

* S. Ikeda (1968) "Asymptotic equivalence of real probability
 distributions," Ann. Inst. Stat. Math. 20, 339-361