数理解析研究所講究録
第197巻 1974年 113-122

共分散行列に関する検定の仮説の近傍での漸近展開について

熊本大学教養部　長尾寿夫

1. 序

多次元正規分布の共分散行列Σに関する次の仮説検定問題を取り扱う。

(i) 仮説 $H_1: \Sigma=\Sigma_0$ 対立仮説 $K_1: \Sigma\neq\Sigma_0$ (ii) $H_2: \Sigma=\sigma^2 I$ $K_2: \Sigma\neq\sigma^2 I$ (iii) $H_3: \Sigma=\Sigma_D$ $K_3: \Sigma\neq\Sigma_D$ (iv) $H_4: \Sigma_1=\cdots=\Sigma_k(=\Sigma)$ $K_4: \Sigma_i\neq\Sigma_j$ $(i\neq j)$. ここでΣ_Dは，次の行列である。

$$(1.1)\qquad \Sigma_D=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma_{gg}\end{pmatrix}.$$

これに対する尤度比検定をλとしたとき，対立仮説の下での漸近展開は，(i),(ii) に対しては，Sugiura[9]，(iii),(iv) に対しては，Nagao[7]，[6]によって求められた。その第一項は，正規分布となり，仮説の下では，その分散は0となる。このことよりNagao[8]は，(i)～(iv) に対する検定基準をあたえ

仮説の下での漸近展開を求めた。ここではそれらの検定と(iii), (iv)に対する尤度比検定の仮説の近傍での漸近展開を取り扱う.（ただし n^{-1} の項は, 省略）.

2. 検定統計量

$X_1, X_2, \cdots, X_N$ を p 次元正規分布 $N(\mu, \Sigma)$ からの標本とする. このとき(i)に対して,

$$T_1 = \frac{n}{2} \mathrm{tr}(S\Sigma_0^{-1}/n - I)^2 \tag{2.1}$$

ただし $S = \sum_{\alpha=1}^{N} (X_\alpha - \bar{X})(X_\alpha - \bar{X})'$, $n = N-1$.

(ii)に対しては,

$$T_2 = \frac{p^2 n}{2} \mathrm{tr}\left\{\frac{S}{\mathrm{tr}S} - p^{-1} I\right\}^2 . \tag{2.2}$$

この検定は, 別の観点より John [3] と Sugiura[10]により, locally best invariant test であることが示されている。

(iii)に対しては,

$$T_3 = \frac{n}{2} \mathrm{tr}(SS_D^{-1} - I)^2 , \tag{2.3}$$

ただし

$$S_D = \begin{pmatrix} s_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_{pp} \end{pmatrix} . \tag{2.4}$$

特に，$g=2$ のとき，$T_3=n\,\mathrm{tr}\,S_{12}S_{22}^{-1}S_{21}S_{11}^{-1}$ となり，Pillai 統計量となる。 (iv) に対しては，

$$(2.5)\quad T_4=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha \mathrm{tr}\left\{\frac{S_\alpha}{n_\alpha}\left(\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}S_\alpha\right)^{-1}-I\right\}^2$$

ただし $S_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{N_\alpha}(X_{\alpha\beta}-\bar{X}_\alpha)(X_{\alpha\beta}-\bar{X}_\alpha)'$，$n_\alpha=N_\alpha-1$，$n=\sum_{\alpha=1}^{k}n_\alpha$.

また(iii)に対する尤度比検定は，

$$(2.6)\quad \lambda_3=\frac{|S|^{\frac{N}{2}}}{\prod_{\alpha=1}^{g}|S_{\alpha\alpha}|^{\frac{N}{2}}}.$$

(iv)に対する尤度比検定は，

$$(2.7)\quad \lambda_4=\frac{\prod_{\alpha=1}^{k}|S_\alpha/n_\alpha|^{n_\alpha/2}}{\left|\sum_{\alpha=1}^{k}S_\alpha/n\right|^{n/2}}$$

3．準備

$S(p\times p)$ を Wishart 分布 $W(\Sigma,n)$ とする。このとき次の補題をえる。

補題 1．$\Sigma=I+n^{-\frac{1}{2}}\Theta$ の下で，$Y=\sqrt{\frac{n}{2}}(\log S/n-\log\Sigma)$ は，漸近的に，$p(p+1)/2$ 次元正規分布平均 0，共分散行列

$$(3.1)\quad \begin{array}{cc} \overbrace{}^{p} & \overbrace{}^{p(p-1)/2} \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

に従う．ただし $\log S\equiv T'(\log\Lambda)T$.

証明．$U=(\Sigma^{-\frac{1}{2}}S\Sigma^{-\frac{1}{2}}-nI)/\sqrt{2n}$ とすると，Uは漸近的に，$p(p+1)/2$ 次元正規分布平均0共分散行列(3.1)をもつ．ところで $\Sigma=I+n^{-\frac{1}{2}}\theta$ より，$\log S/n=\log(I+\frac{1}{\sqrt{n}}(\theta+\sqrt{2}U)+O_p(n^{-1}))$
$=\frac{1}{\sqrt{n}}(\theta+\sqrt{2}U)+O_p(n^{-1})$．かくて $Y=U+O_p(n^{-\frac{1}{2}})$．

次に $Z=\sqrt{\frac{n}{2}}\log S/n$ の分布を考える。$S=ne^{\sqrt{\frac{2}{n}}Z}$ より，Jacobian は，Jack [2] より

$$(3.2)\quad \left|\frac{\partial S}{\partial Z}\right|=(2n)^{p(p+1)/4}\operatorname{etr}\left[\sqrt{\tfrac{2}{n}}Y\right]\prod_{i>j}^{p}\frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}\ .$$

ただし $f(\lambda_i)=e^{\lambda_i}$ で，$\lambda_i=\sqrt{\frac{2}{n}}ch_i(Z)$ である。

ここでは，漸近展開を求めるのが目的であるから，(3.2)の後半を展開すると

$$(3.3)\quad \prod_{i>j}^{p}\frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}=1+\tfrac{1}{2}(p-1)\sqrt{\tfrac{2}{n}}\operatorname{tr}Z+O(n^{-1})\ .$$

また $|e^A|=\operatorname{etr}A$ より Z の分布は，次であたえられる。

$$(3.4)\quad c^*\cdot\operatorname{etr}\left[\tfrac{1}{2}(n-p+1)\sqrt{\tfrac{2}{n}}Z-\tfrac{n}{2}\Sigma^{-1}e^{\sqrt{\frac{2}{n}}Z}\right]\left[1+\tfrac{1}{2}(p-1)\sqrt{\tfrac{2}{n}}\operatorname{tr}Z+O(n^{-1})\right],$$

ただし

$$(3.5)\quad c^*=\left\{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left[\tfrac{1}{2}(n+1-j)\right]\right\}^{-1}\left(\tfrac{n}{2}\right)^{p(2n-p-1)/4}\pi^{-p(p-1)/4}\,|\Sigma|^{-\frac{n}{2}}\ .$$

補題 2. $p(p+1)/2\times 1$ ベクトル $(z_{11},\cdots,z_{pp},z_{12},\cdots,z_{p-1,p})'$ は，平均 0 共分散行列 $\Sigma^{*}=(\sigma_{ij,kl})$ をもつ正規分布とする。$(i,j)=a$, $(k,l)=b$, $(m,n)=c$, $(g,r)=d$, $(s,t)=e$, $(u,v)=f$ とすると，

$$(3.6)\quad E y_a y_b y_c y_d=\sigma_{ab}\sigma_{cd}+\sigma_{ac}\sigma_{bd}+\sigma_{ad}\sigma_{bc}.$$

4. 漸近展開

T_1 の特性関数は，次であたえられる。

$$(4.1)\quad C(t)=c_{p,n}\int \exp[(it)\tfrac{n}{2}\mathrm{tr}(S\Sigma_0^{-1}/n-I)^2]\,|S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Sigma|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Sigma^{-1}S]\,dS.$$

$\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}S\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}\longrightarrow S$ とすると

$$=c_{p,n}\int \exp[(it)\tfrac{n}{2}\mathrm{tr}(S/n-I)^2]\,|S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}|\Sigma\Sigma_0^{-1}|^{-\frac{n}{2}}\mathrm{etr}[-\tfrac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\Sigma^{-1}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}S]\,dS.$$

かくて統計量 $T_1=\frac{n}{2}\mathrm{tr}(S/n-I)^2$ となり，S は，$W(\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}\Sigma\Sigma_0^{-\frac{1}{2}},n)$ となる。ここで $\Sigma=\Sigma_0+n^{-\frac{1}{2}}\Theta$ の下での T_1 の漸近展開を求める。すると $\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}\Sigma\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}=I+n^{-\frac{1}{2}}\Theta^{*}$ となる。ただし $\Theta^{*}=\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}\Theta\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}$. よって補題 1 により $Y=\sqrt{\frac{n}{2}}(\log S-\log(I+n^{-\frac{1}{2}}\Theta^{*}))$ は，漸近的に正規分布であるから，T_1 を Y でもって表示すると，

$$(4.2)\quad T_1=g_0(Y)+\frac{1}{\sqrt{n}}g_1(Y)+O_p(n^{-1})$$

となる．ここで

$$
(4.3)\quad
\begin{aligned}
g_0(Y) &= \mathrm{tr}\left(Y + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Theta^*\right)^2, \\
g_1(Y) &= \sqrt{2}\,\mathrm{tr}\left(Y + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Theta^*\right)\left\{\left(Y + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Theta^*\right)^2 - \tfrac{1}{2}\Theta^{*2}\right\}.
\end{aligned}
$$

よって T_1 の特性関数は，次のようになる。

$$
(4.4)\quad C(t) = E\left[\exp(it\,g_0(Y))\left\{1 + \frac{it}{\sqrt{n}}g_1(Y)\right\}\right] + O(n^{-1}).
$$

そこで，上の平均を求めるために，$g_0(Y)$ を $Z=\sqrt{\frac{n}{2}}\log S/n$ で，あらわし，Z の分布 (3.4) をもちいると，(4.4) の第一項は，次のようになる。

$$
(4.5)\quad E[\exp(it\,g_0(Y))] = c\int \exp\left[-\tfrac{1}{2}(1-2it)\mathrm{tr}Z^2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}\Theta^* Z\right]
$$

$$
\cdot\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}[it-1]\mathrm{tr}\Theta^{*2}Z + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Theta^* Z^2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{tr}Z^3\right) + O(n^{-1})\right\}dZ,
$$

ただし $c = c^*\cdot \mathrm{etr}\left[-\frac{n}{2}(I + n^{-\frac{1}{2}}\Theta^*)^{-1}\right]$.

ここで，exp の中を $p(p+1)/2$ 次元正規分布となるように，少し修正すると次のようになる。

$$
(4.6)\quad c\cdot(2\pi)^{p(p+1)/4}\, 2^{-p(p-1)/4}(1-2it)^{-\frac{f}{2}}\cdot\exp\left[\frac{1}{4}\mathrm{tr}\Theta^{*2} + \frac{it}{2(1-2it)}\mathrm{tr}\Theta^{*2}\right]
$$

$$
\times E\left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(it-1)\mathrm{tr}\Theta^{*2}Z + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Theta^* Z^2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{tr}Z^3\right\} + O(n^{-1})\right].
$$

ここで E は，Z を平均 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-2it)^{-1}\Theta^*$)，共分散行列 $\sigma_{ij,kl} = (1-2it)^{-1}\cdot(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$ としたときの平均を意味する。

また $f=\frac{1}{2}p(p+1)$．よって．係数をStirlingの公式をもちいて展開し，後半を補題2をもちいて計算すると，

$$(4.7)\quad (1-2it)^{-\frac{f}{2}}\exp\left[\frac{it}{2(1-2it)}a_2\right]\left\{1+\frac{1}{\sqrt{n}}\left[-\frac{a_3}{12}(t)_3+\frac{1}{4}(a_3-(p+1)a_1)(t)_2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}(-a_3+(p+1)a_1)(t)_1+\frac{1}{12}a_3\right]+O(n^{-1})\right\},$$

ただし $a_i=\mathrm{tr}\,\theta^{*i}$, $(t)_\alpha=(1-2it)^{-\alpha}$.

同様に才二項も計算することにより特性関数は，次のようになる。

$$(4.8)\quad C(t)=(1-2it)^{-\frac{f}{2}}\exp\left[\frac{it}{2(1-2it)}a_2\right]\left\{1+\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{a_3}{6}(t)_3+\frac{1}{2}(p+1)a_1(t)_2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}(-a_3-(p+1)a_1)(t)_1+\frac{1}{3}a_3\right]+O(n^{-1})\right\}.$$

よって上を反転することにより次の定理を得る。

定理1．$\Sigma=\Sigma_0+n^{\frac{1}{2}}\Theta$ の下で，

$$(4.9)\quad P_r(T_1\leq x)=P_f(\delta^2)+\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{a_3}{6}P_{f+6}(\delta^2)+\frac{1}{2}(p+1)a_1P_{f+4}(\delta^2)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(-a_3-(p+1)a_1)P_{f+2}(\delta^2)+\frac{1}{3}a_3P_f(\delta^2)\right\}+O(n^{-1}),$$

ただし $f=\frac{1}{2}p(p+1)$，$a_i=\mathrm{tr}(\Theta\Sigma_0^{-1})^i$，であり，$P_f(\delta^2)$ は，自由度 f である非心母数 δ^2 をもつ非心 χ^2 分布である。ただし $\delta^2=a_2/4$.

同様な方法により以下の定理を得る。

定理2． $\Sigma=\sigma^2 I+n^{-\frac{1}{2}}\Theta$ の下で，

(4.10) $P_r(T_2\leq x)=P_f(\delta^2)+\frac{1}{\sqrt{n}}\{(\frac{1}{6}a_3-\frac{1}{2}p^{-1}a_1a_2+\frac{1}{3}p^{-2}a_1^3)P_{f+6}(\delta^2)$

$+(-\frac{1}{2}a_3+p^{-1}a_1a_2-\frac{1}{2}p^{-2}a_1^3)P_{f+2}(\delta^2)+(\frac{1}{3}a_3-\frac{1}{2}p^{-1}a_1a_2+\frac{1}{6}p^{-2}a_1^3)$

$\times P_f(\delta^2)\}+O(n^{-1})$.

ただし $f=\frac{1}{2}p(p+1)-1$ ， $a_i=\sigma^{-2i}\mathrm{tr}\Theta^i$ ， $\delta^2=a_2/4$ ．

定理3． $\Sigma=\Sigma_D+n^{-\frac{1}{2}}\Theta$ の下で，

(4.11) $P_r(T_3\leq x)=P_f(\delta^2)+\frac{n^{-\frac{1}{2}}}{6}a_3\{P_{f+6}(\delta^2)-3P_{f+2}(\delta^2)+2P_f(\delta^2)\}+O(n^{-1})$.

ただし $f=\frac{1}{2}(p^2-\sum_{\alpha=1}^{g}p_\alpha^2)$ ， $a_i=\mathrm{tr}(\Theta\Sigma_D^{-1})^i$， $\delta^2=a_2/4$ ．

なお特に $g=2$ の場合， $n^{-\frac{1}{2}}$ の項は，0となる。またその場合に対して，Fujikoshi [1], Lee [4] によって上は求められている。

定理4． $\Sigma_\alpha=\Sigma+n^{-\frac{1}{2}}\Theta_\alpha$ $(\alpha=1,2,\cdots,k)$ とし， $n_\alpha/n=\rho_\alpha$ 一定の下で，

(4.12) $P_r(T_4\leq x)=P_f(\delta^2)+n^{-\frac{1}{2}}\{\frac{1}{6}(\mathrm{tr}A_3)P_{f+6}(\delta^2)+\frac{1}{2}(p+1)(\mathrm{tr}E_1)P_{f+4}(\delta^2)$

$$+\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A_3-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\widehat{\Theta}A_2-\frac{1}{2}(p+1)\mathrm{tr}E_1\right\}P_{f+2}(\delta^2)+\left(\frac{1}{3}\mathrm{tr}A_3+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\widehat{\Theta}A_2\right)P_f(\delta^2)\Big\}$$

$$+O(n^{-1}),$$

ただし $f=\frac{1}{2}(k-1)p(p+1)$, $A_\beta=\sum_{\alpha=1}^{k}\rho_\alpha\{(\Theta_\alpha-\widehat{\Theta})\Sigma^{-1}\}^\beta$, $\widehat{\Theta}=\sum_{\alpha=1}^{k}\rho_\alpha\Theta_\alpha\Sigma^{-1}$,

$E_1=\sum_{\alpha=1}^{k}(\Theta_\alpha-\widehat{\Theta})\Sigma^{-1}$, $\delta^2=\frac{1}{4}\mathrm{tr}A_2$.

定理 5. $\Sigma=\Sigma_D+N^{-\frac{1}{2}}\Theta$ の下で,

$$(4.13)\quad P_r(-2\log\lambda_3\le x)=P_f(\delta^2)+\frac{N^{-\frac{1}{2}}}{6}a_3\{P_{f+4}(\delta^2)-3P_{f+2}(\delta^2)$$

$$+2P_f(\delta^2)\}+O(N^{-1}) .$$

特に, $g=2$ の場合には, 上の定理は, Lee [4], Muirhead [5], Sugiura [12] によってあたえられている。

定理 6. $\Sigma_\alpha=\Sigma+n^{-\frac{1}{2}}\Theta_\alpha$ $(\alpha=1,2,\cdots,k)$ とし, $n_\alpha/n=\rho_\alpha$ 一定の下で

$$(4.14)\quad P_r(-2\log\lambda_4\le x)=P_f(\delta^2)+n^{-\frac{1}{2}}\Big\{\frac{1}{6}(\mathrm{tr}A_3)P_{f+4}(\delta^2)+\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A_3-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\widehat{\Theta}A_2\right)$$

$$\times P_{f+2}(\delta^2)+\left(\frac{1}{3}\mathrm{tr}A_3+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\widehat{\Theta}A_2\right)P_f(\delta^2)\Big\}+O(n^{-1}) .$$

なお $k=2$ の場合, Sugiura [11] によって求められている。

REFERENCES

[1] Fujikoshi, Y. (1970). Asymptotic expansions of the distributions of test statistics in multivariate analysis. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I. 34 73-144.

[2] Jack, H. (1964-65). Jacobians of transformations involving orthogonal matrices. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 67 81-103.

[3] John, S. (1971). Some optimal multivariate tests. Biometrika 58 123-127.

[4] Lee, Y.S. (1971). Distribution of the canonical correlations and asymptotic expansions for distributions os certain independence test statistics. Ann. Math. Statist. 42 526-537.

[5] Muirhead, R.J. (1972). On the test of independence between two sets of variates. Ann. Math. Statist. 43 1491-1497.

[6] Nagao, H. (1970). Asymptotic expansions of some test criteria for homogeneity of variances and covariance matrices from normal populations. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 34 153-247.

[7] ________ (1972). Non-null distributions of the likelihood ratio criteria for independence and equality of mean vectors and covariance matrices. Ann. Inst. Statist. Math. 24 67-79.

[8] ________ (1973). On some test criteria for covariance matrix. Ann. Statist. (To appear).

[9] Sugiura, N. (1969). Asymptotic expansions of the distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix. Ann. Math. Statist. 40 2051-2063.

[10] ________ (1972). Locally best invariant test for sphericity and the limiting distributions. Ann. Math. Statist. 43 1312-1316.

[11] ________ (1972). Asymptotic formulas for hypergeometric function ${}_2F_1$ of matrix argument, useful in multivariate analysis. Report at the meeting of the Mathematical society of Japan.

[12] ________ (1973). Asymptotic non-null distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix under local alternatives. Ann. Statist. (To appear).