数理解析研究所講究録
第200巻 1974年 25-33

ある種の距離2の正則グラフの特徴づけ

阪大 理学部　沼田 稔

§1. 序

講演の時には、まだ完全には特徴づけされていなかったのですが、その後、予想に反し~~た型~~て特徴づけが完成されましたので訂正しておきます。

結果は次の通りです。

定理.　距離2の正則グラフΓが次の特徴をもっているとする。

i) 結ばれている二点と共通に結ばれる点の数は一定である。

ii) 互いに結ばれない三点が存在する。

iii) 互いに結ばれない三点に対し共通に結ばれる点は存在しない。

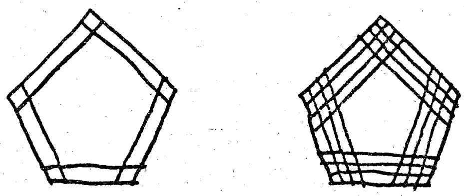
その時、グラフΓは次のいずれかである。

1) 次元2の Lattice グラフ

2) Triangle グラフ

3) 27点からなるグラフで *intersection matrix* は
B(16, 10, 8)

4) $5 \cdot h^2$ ($h \geqq 2$) 個の点からなる下の図のようなグラフである。このグラフは, 2以上の任意の自然数hに対し, 唯一つ存在する。



$h=2$ のグラフ　　$h=4$ のグラフ

点は *line* の交点
同じ *line* 上の点を結ぶ

2重可移でない有限置換群の自明でない *self paired orbit* から作ったグラフは, 自明でない正則グラフでありしかも条件 i) を満す。したがって *primitive rank* 3 でなくとも, ある *self-paired orbit* から作られたグラフが距離2であり条件 ii) と iii) を満せば そのグラフは定理の条件をすべて満足しグラフは決定される。したがってもとの有限置換群もほぼ決定される。条件 ii) は多くの場合満足されるものであるから条件 iii) がこの定理のグラフの特徴づけにとって本質的なものである。しかしながら条件 ii) はこの定理の証明にはかかすことのできないものである。

1) から 4) までのグラフの特徴づけには定理の条件はどれも

必要であるが、もしもっと条件を弱くしてより多くのグラフを全体として特徴づけることが出来るならばすばらしいと思います。また条件を少し変形して特徴づけを考えることも出来るのではないかと思います。

§2. 定理の証明の概略

グラフ $\Gamma=(V,B)$ が定理の条件を満足しているとせよ。

$V\ni\alpha$ に対し、

$$\Delta(\alpha)=\{\beta \mid (\alpha,\beta)\in B\}, \qquad \Gamma(\alpha)=V\setminus\Delta(\alpha)\setminus\{\alpha\}$$

と定義する。

$\Gamma(\alpha)\ni\gamma$, $\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)\ni\beta$ とすると、条件 iii) から

$$\Delta(\beta)=\{\Delta(\beta)\cap\Delta(\gamma)\}\cup\{\Delta(\beta)\cap\Delta(\alpha)\setminus\Delta(\gamma)\}\cup\{\alpha,\gamma\}。$$

正則であることと条件 i) を満すことから

$|\Delta(\beta)|=k$, $\cancel{\Delta(\alpha)\cap\beta}$ $|\Delta(\beta)\cap\Delta(\gamma)|=a$ とすると

$|\Delta(\beta)\cap\Delta(\alpha)\setminus\Delta(\gamma)|=k-a-2$

したがって

$$|\Delta(\beta)\cap\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)|=a-(k-a-2)=2a+2-k$$

故に

$$|\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)|\geqq 2a+2-k+1=2a+3-k。$$

I. 実際には $2a+4-k\geqq|\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)|\geqq 2a+3-k$ となるこ

とを示す

a)、 任意の結ばれない2点に対し、共通に結ばれる点の数が $2a+3-k$ で一定である時を考える。

この時，グラフは，強正則グラフとなって、D. G. Higman の結果を使うと、パラメーターの関係だけから矛盾はただちに示されます．

b)， a)でない時，結ばれない二点 α, γ を $|\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)|$ が最大になるようにとる。 この時条件 ii) から，$\Gamma(\alpha)\cap\Gamma(\gamma)\neq\phi$ 。

$\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)$ の部分集合 S で、S の点がすべて互いに結ばれるとすると

$$|S|\leqq\frac{1}{2}|\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)|\text{。}$$

さらに条件 iii) から $\Delta(\alpha)\ni\beta$ とすると、$\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta)$ はすべて互いに結ばれる。

以上のことから，$\Delta(\alpha)\setminus\Delta(\gamma)\ni\beta$ とすると

$$|\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)\cap\Delta(\beta)|\geqq\frac{1}{2}|\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)|\text{。}$$

次に，$\Delta(\alpha)\setminus\Delta(\gamma)\setminus\{\beta\}$ のある点は β と結ばれないことを示す。

もし β が $\Delta(\alpha)\setminus\Delta(\gamma)\setminus\{\beta\}$ のすべての点と結ばれたとすると

$$\begin{aligned}2a+2-k&=2|\Delta(\alpha)\cap\Delta(\beta)\cup\beta|-k\geqq|\Delta(\alpha)\setminus\Delta(\gamma)|\\&\geqq|\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma_0)|\geqq 2a+2-k+1,\quad \gamma_0\in\Gamma(\alpha)\cap\Gamma(\gamma).\end{aligned}$$

矛盾である。

β と結ばれない $\Delta(\alpha)\setminus\Delta(\gamma)\setminus\{\beta\}$ の点を β' とすると条件 iii) から

$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta) \cap \Delta(\beta') = \phi$.　　すなわち

$\{\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \cap \Delta(\beta)\} \cap \{\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \cap \Delta(\beta')\} = \phi$。

さらに

$\{\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \cap \Delta(\beta)\} \cup \{\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \cap \Delta(\beta')\} = \Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)$.

だから，　$\Delta(\alpha) \setminus \Delta(\gamma) \ni {}^\forall\beta$ に対し

$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \cap \Delta(\beta)| = \frac{1}{2} |\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)|$

したがって　$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma) \ni \delta$ に対し

$k-a-2 = |\Delta(\alpha) \cap \Delta(\delta) \setminus \Delta(\gamma)| = \frac{1}{2} |\Delta(\alpha) \setminus \Delta(\gamma)|$

故に

$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| = 2a+4-k$.

II.　結ばれない任意の二点 α, γ に対し，$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| = 2a+4-k$ である時を考える。

$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)|$ は証明から明らかなように偶数である。

$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| = 2a+4-k = 2$ の時，　$k = 2a+2$ であり intersection matrix $B(2a+2, a, 2)$ をもつ強正則グラフは、S. S. Schrikhande [2] によって決定されている。条件 iii) を満すことから、次元2の lattice グラフに限ることがわかる。

$|\Delta(\alpha) \cap \Delta(\gamma)| = 2a+4-k = 4$ の時　$k = 2a$ であり intersection matrix $B(2a, a, 4)$ をもつ強正則グラフは

S.S. Schrikhande [3]. W.S. Conner [4]. A.J. Hoffman [5] によって完全に決定されている。条件iii)を満すことから、triangle グラフに限ることがわかる。

$|\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)|=2a+4-k\geqq 6$ の時、27点からなるグラフに限ることを示す。証明の手順は次のようにする。

第1に、$2k\leqq 3a+4$ という不等式を示す。

第2に、上の不等式から互いに結ばれない4点は存在しないことはすぐ示され、$\Gamma(\alpha)$の点の数を二通りに数えることにより $k=4d$, $a=3d-2$ $(d\geqq 3)$ が証明される。

第3に、intersection matrix $B(4d, 3d-2, 2d)$ をもつ強正則グラフで定理の条件を満すものは $d=4$ の時だけであることを導く。

第1の k と a の不等式が導びかれるならば、第2, 第3の証明は容易である。

第1の不等式を証明する。

$\Gamma(\alpha)\ni\gamma$, $|\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)|=2a+4-k$. ということは $\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)$ の各点は唯一つの $\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)$ の点と結ばれないことを示している。したがって $\Delta(\alpha)\ni\beta_1, \beta_2$ β_1 と β_2 は結ばれない2点とする。その時 $|\Delta(\beta_1)\cap\Delta(\beta_2)\cap\Gamma(\alpha)|=1$ であり $\Delta(\beta_1)\cap\Delta(\beta_2)\cap\Gamma(\alpha)=\{\gamma\}$ とすると $\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)=\Delta(\alpha)\cap\Delta(\beta_1)\cap\Delta(\beta_2)\cup\{\beta_1,\beta_2\}$ となる。

$\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_1)\setminus\{\beta_2\}\ni\delta$ とすると I の証明から明らかなように $|\Delta(\alpha)\cap\Delta(\gamma)\cap\Delta(\delta)|=\frac{1}{2}(2a+4-k)$

故に

$$|\Delta(\alpha)\cap\Delta(\beta_1)\cap\Delta(\beta_2)\cap\Delta(\delta)|=\frac{1}{2}(2a+4-k)-1$$

又、結ばれない2点 β_1,δ について考えると

$$|\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_2)\cap\Delta(\delta)|=\frac{1}{2}(2a+4-k)-1\geqq 2$$

$\Delta(\alpha)\cap\Delta(\beta_1)\cap\Delta(\beta_2)\cap\Delta(\delta)\ni\eta$ とすると、η は $\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_2)\cap\Delta(\delta)$ の中に結ばれる点も結ばれない点も含む。この事実から

$$\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_1)\cap\Gamma(\eta)\neq\phi,\quad \Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_2)\cap\Gamma(\eta)\neq\phi$$

が示される。

$|\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_1)\cap\Gamma(\eta)|+|\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_2)\cap\Gamma(\eta)|=k-a-2$, であるから $|\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_2)\cap\Gamma(\eta)|\geqq\frac{1}{2}(k-a-2)$ としてよい。

$\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_1)\cap\Gamma(\eta)\ni\rho$ とすると β_1,ρ は共に $\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_2)\cap\Gamma(\eta)$ のすべての点と結ばれる。したがって $\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_2)\cap\Delta(\rho)\supseteq\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_2)\cap\Gamma(\eta)$. 故に

$$\frac{1}{2}(2a+4-k)-1=|\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_2)\cap\Delta(\rho)|\geqq|\Delta(\alpha)\cap\Gamma(\beta_2)\cap\Gamma(\eta)|\geqq\frac{1}{2}(k-a-2)$$

$$\therefore\quad 3a+4\geqq 2k\quad。$$

第2, 第3の証明は省略します。

Ⅲ、 結ばれない二点と共通に結ばれる点の数が $2a+3-k$ の時も $2a+4-k$ の時も 起きる場合は、定理4の4)のグラフになることを証明する。

証明は3つの段階に分けます。

第1に　$2a+3-k \leqq \frac{k}{3}$ を示す。

第2に　$2a+3-k=1$ ~~を示す~~。 $k=2a+2$ を示す。

第3に　条件を満すグラフを決定する。

証明は容易でもないが長くなりますので省略させていただきます。

参考文献

[1] N. Biggs: Finite groups of Automorphisms, Cambridge University Press, 1971

[2] S. S. Schrikhande: The uniqueness of the L_2-association scheme, Ann. Math. Statist. 30 (1959) 781-798

[3] ―――――: On a characterization of the triangular association scheme, Ann. Math. Statist. 30 (1959) 39-47

[4] W. S. Conner: The uniqueness of the triangular association scheme, Ann. Math. Statist. 29 (1958) 262-266

[5] A. J. Hoffman: On the uniqueness of the triangluar association scheme, Ann. Math. Statist. 31 (1960) 492-497