数理解析研究所講究録
第 200 巻 1974 年 34-37

tight 4 − design について

阪大大学院　加納幹雄

R.M Wilson と D.K.Ray−Chaudhuri によって Fisher の不等式の拡張である次の定理が証明された

定理　$\mathcal{D}$ を $2s-(v,k,\lambda)$ design とし

$v \geq k+s \quad \Rightarrow \quad b=$ block の個数 $\geq \binom{v}{s}$

上式で等号の成り立つ design を tight $2s$−design という。以下 tight 4−design について。

現在知られている tight 4−design は自明な $v-2-(v,v-2,1)$ design と M_{23} を自己同型群としてもつ $4-(23,7,1)$ design（又はこれの complementary）だけである。これより自明でない tight 4−design は $4-(23,7,1)$ に限るのではないかと思われる。

まず tight 4−design に関しても上の両者による次の結果が基本的である

定理　$\mathcal{D}$ を $4-(v,k,\lambda)$ tight 4−design とすると異なる 2 つの block の intersection number は 2 つ

あってこれは

$$X^2 - \left\{ \frac{2(k-1)(k-2)}{(k-3)} + 1 \right\} X + \lambda\left(2 + \frac{4}{k-3}\right) = 0$$

の2根である。

Cor　$k-3 \mid 4\lambda$　（及び $\lambda=1 \longrightarrow 4-(23,7,1)$）

この定理により容易に $\lambda=1$ なる tight 4-design は $4-(23,7,1)$ に限ること及び $2 \leqq \lambda \leqq 10$ では自明でない tight 4-design は存在しないことが確かめられる。

今 μ_2, μ_1 $(\mu_2 > \mu_1)$ を異なる2つの block の intersection number とすると次の結果が得られた。

tight 4-design において

1. $\mu_2 - \mu_1 = 1$　ならば　自明なもの
2. $\mu_2 - \mu_1 = 2$　ならば　$4-(23,7,1)$ design
3. $\mu_2 - \mu_1 = 3$　ならば　存在しない
4. $\dfrac{k-\mu_2}{\mu_2-\mu_1}$ は整数

4. は野田氏に教えてもらった、有力ではないかと思われる結果

次に 1〜4. の簡単な証明を述べる

1. $\mu_2 - \mu_1 = 1$ のときは

$$\mu_2+\mu_1=\frac{2(k-1)(k-2)}{(v-3)}+1 \qquad \mu_2\cdot\mu_1=\frac{k(k-1)^2(k-2)}{(v-2)(v-3)}$$

$$\because\ \lambda=\frac{1}{2}\,\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{(v-2)(v-3)}$$ より

上の2式と合わせて

$$\{v-(k+1)\}\{v-(k+2)\}=0$$ が得られるのでOK

2.3 $\mu_2-\mu_1=a$ とおく 又 $k<\frac{v}{2}$ としてよいので

$$\frac{k(k-1)}{(v-2)}-\frac{(k-1)(k-2)}{(v-3)}<\frac{3}{4}$$

これと上の3つの式より

$$T=\frac{(k-1)(k-2)}{v-3}<a^2-1$$

又 $\lambda<\frac{T^2}{2}$ これから後は Cor を用いればよいが

逆向きの不等式も用いないと計算が大変である.

4. N を $v\times b$ 行列, A_1, A_2 を $b\times b$ 行列として

次のように定義する. ただし点は $a_1,\dots,a_v$, block は $B_1,\dots,B_b$ で表わす.

$$(N)_{ij}=\begin{cases}1 & a_i\in B_j\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

$$(A_i)_{k,l}=\begin{cases}1 & |B_k\cap B_l|=\mu_i\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

とおくと

$$ {}^tN\cdot N=kI+\mu_1A_1+\mu_2A_2$$

$$J=I+A_1+A_2$$

$A_1 A_2 = A_2 A_1$　　　これは少々面倒

これより A_1, A_2 の固有値を計算し、これが代数的整数であることに注意すればよい

tight 4-design の決定には程遠いですが、これは興味ある問題だと思います

参　R.M Wilson and D.K. Ray-Chaudhuri
On t-designs (Generalization of Fisher's inequality to t-design)
Amer Math Soc Notices 18 (1971) 805