数理解析研究所講究録
第 200 巻 1974 年 45-51

標数 p の有限体上の 4 次元 symplectic 群の p-Sylow 群からの特徴づけ

北大 理学　中川 暢夫

§1. 序

$PSL(n,q)$ (qは素数巾)の特徴づけが、最近 N. Ito, M. O'Nan, T. P. McDonough, T. Tuzuku などによっていくつかなされてきた。2重可移置換群(G,Ω)が$PSL(n,q)$のある性質を有するとき，(G,Ω)は$PSL(n,q)$を含んでしまうといった仕事である。

これらに共通の方法は，与えられた性質から，その上にGが自然に働くようなうまいBlock-Designを作り，それがProjective Spaceとなり，更にGがすべてのTransvectionを含むことをいうのである。

都筑氏の与えた条件は「(G,Ω)が2重可移で次数とp-Sylow群(pは体の標数)が$PSL(n,q)$ ($q=p^\alpha$) のそれらと同じ」というものであるが，ここで以下のべるのは，symplectic群についての同様の試みである。

但し今までの成果は4次元と6次元の一部についてのみである。このときはD. G Higmanのrank 3及びrank rの置換群についての研究が本質的である。

§2.

定理1　$(G, \Omega) =$ primitiveで2重可移でない群

$|\Omega| = 1 + q + q^2 + q^3$, $q = p^\alpha$ (pは1つの素数)

$\tilde{P} = PS_p(4. q)$ の Sylow p-subgroup

$P = G$ の Sylow p-subgroup

Assume $(P, \Omega) \cong (\tilde{P}, \mathbb{P}_3(q))$

$\Longrightarrow$ $(PS_p(4. q), \mathbb{P}_3(q)) \subseteq (G, \Omega)$

(ここで$\mathbb{P}_3(q)$はGF(q)上の3次元projective spaceである。)

定理2　$(G, \Omega) =$ primitiveでかつ2重可移でない群

$|\Omega| = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5$, $q = p^\alpha$ (pは1つの素数)

$\tilde{P} = PS_p(6, q)$ の Sylow p-subgroup

$P = G$ の Sylow p-subgroup　Assume $(P, \Omega) \cong (\tilde{P}, \mathbb{P}_5(q))$

$\Longrightarrow$ (G, Ω) はrank 3 groupでかつsubdegreeは、1

$q + q^2 + q^3 + q^4$, q^5 である。

§3. 定理の証明

まず D. G Higman による次の lemma をあげる。

(G, Ω) を transitive group, 任意の $a \in \Omega$ に対し Ω はちょうど r コの G_a-orbits に分かれるとする。それらを $\Gamma_0(a)=\{a\}$, $\Gamma_1(a)$, ---- $\Gamma_{r-1}(a)$ とする。ここで G_a は a の stabilizer を意味する。すべての $a \in \Omega$, $g \in G$, $i=1,2,\cdots r-1$ に対して $\Gamma_i(a)^g = \Gamma_i(a^g)$ としてよい。$\Delta'(a) = \{a^{g^{-1}} \mid a^g \in \Delta(a)\}$ とすると $\Delta(a)$ が G_a-orbit であれば $\Delta'(a)$ も又1つの G_a-orbit である。

$|\Gamma_i(a)| = l_i$ (a に depend しない, $i=1,2,\cdots,r-1$)

$\mu_{ij}^{(\alpha)} = |\Gamma_\alpha(b) \cap \Gamma_i(a)|$ ($b \in \Gamma_j(a)$) とおく。

Lemma ([2] の (4.1) 及び (4.2))

1) $\sum_i \mu_{ij}^{(\alpha)} = l_\alpha$ かつ $\sum_\alpha \mu_{ij}^{(\alpha)} = l_i$

$\mu_{i0}^{(\alpha)} = \delta_{i\alpha} l_\alpha$ かつ $\mu_{0i}^{(\alpha)} = \delta_{i\alpha'}$

2) $l_j \mu_{ij}^{(\alpha)} = l_i \mu_{ji}^{(\alpha')}$ かつ $l_i \mu_{k'i}^{(j)} = l_j \mu_{i'j}^{(k)} = l_k \mu_{j'k}^{(i)}$

(ここで $\Gamma_{\alpha'} = \Gamma_\alpha'$)

定理1において $GF(q)=F$, $Sp(4,q)$ の元の $P_\gamma(4,q)$ の像を $\bar{A}$ であらわす。$\tilde{P} = \left\{ \bar{A} \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ a & 1 & & \\ b & d & 1 & \\ c & b-ad & -a & 1 \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in F \right\}$

$(\tilde{P}, \mathbb{P}_3(q))$ は長さ $1, q, q^2, q^3$ の orbits $\tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \tilde{\Delta}_3$ を

もつ。$a\in\Omega$, $G_a\supset P$とするとき(P,Ω)の長さ$1, q, q^2$, q^3のorbitsをそれぞれ$\Delta_0(a)=\{a\}$, $\Delta_1(a)$, $\Delta_2(a)$, $\Delta_3(a)$とする。まず$(G,\Omega)=$rank 4の場合はG_aのorbitsが$\Delta_0(a)$, $\Delta_1(a)$, $\Delta_2(a)$, $\Delta_3(a)$になる。$b\in\Delta_1(a)$に対して$P_b(\subseteq G_{ab})$のΩ上のorbitsを考えると$\Delta_1(a)$上の各点を固定し，$\Delta_2(a)$上にはtransitiveに働き，$\Delta_3(a)$上には長さq^2のqコのorbitsに分ける。このことから$a\cup\Delta_1(a)=b\cup\Delta_1(b)$ for all $b\in\Delta_1(a)\cup\{a\}$となって，$a\cup\Delta_1(a)$は(G,Ω)の1つのblockとなって(G,Ω)がprimitiveであることに反する。

次に(G,Ω)がrank 3の場合は(G_a,Ω)のorbits分解の可能性は，

(1) $\Delta_0(a)$, $\Delta_1(a)$, $\Delta_2(a)\cup\Delta_3(a)$

(2) $\Delta_0(a)$, $\Delta_1(a)\cup\Delta_2(a)$, $\Delta_3(a)$

(3) $\Delta_0(a)$ $\Delta_1(a)\cup\Delta_3(a)$, $\Delta_2(a)$ の3つである。

このうち(2)以外は起らない。

例えば(1)の場合は，$\Delta_0(a)=\{a\}$, $\Delta_1(a)=\Delta(a)$, $\Delta_2(a)\cup\Delta_3(a)=\Gamma(a)$

$$|\Delta(a)\cap\Delta(b)|=\begin{cases}\lambda & (\text{if } a\in\Delta(b)\\ \mu & (\text{if } a\in\Gamma(b)\end{cases}$$

とおくとLemmaの(1),(2)よりλ,μはa,bのとり方によらず一定で$\mu(q^2+q^3)=q(q-\lambda-1)$が成立する。

故に$q|\lambda+1$, $\lambda<q$より$\lambda=q-1$でこのとき(G,Ω)は

imprimitive になって矛盾である。
(3) の場合も同様である。
次に $\tilde{Q} = \left\{ \bar{A} \in \tilde{P} \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c \in F \right\}$ とおくと

$\tilde{Q}$ は $\tilde{\Sigma}_0 \cup \tilde{\Sigma}_1 \cup \tilde{\Sigma}_2$ を pointwise に固定する。$|\tilde{Q}| = g$,
それ故 G_a $(a \in \Omega)$ において長さ $g + g^2$ の orbit $\Delta_1(a)$ を pointwise に固定する G の元はちょうど g コ存在する。
後は D. G. Higman による [1] の Theorem 2 によって定理 1 の結論を得る。

定理 2 において $(\tilde{P}, P_5(g))$ は長さ $1, g, g^2, g^3, g^4, g^5$ の orbits $\tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \tilde{\Delta}_3, \tilde{\Delta}_4, \tilde{\Delta}_5$ をもつ。
$a \in \Omega$ に対し $G_a \supset P$ とするとき (P, Ω) の長さ $1, g, g^2, g^3, g^4, g^5$ の orbits をそれぞれ $\Delta_0(a) = \{a\}$, $\Delta_1(a)$, $\Delta_2(a)$, $\Delta_3(a)$, $\Delta_4(a)$, $\Delta_5(a)$ とする。
このとき (G, Ω) が rank 6, rank 5, rank 4, rank 3 の可能性が生じるが，考え方は同じであるから rank 4 の 1 つの場合だけについて証明する。(G_a, Ω) の orbits 分解が，
$\Delta_0(a)$, $\Delta_1(a) \cup \Delta_3(a) = \Gamma_1(a)$, $\Delta_2(a) \cup \Delta_4(a) = \Gamma_2(a)$, $\Delta_5(a) = \Gamma_3(a)$
の場合は k_i, $\mu_{ij}^{(\alpha)}$ は Lemma のものと同じとする。

するとLemmaの(1)及び(2)によって $l_2\mu'_{12}+l_3\mu'_{13}=l_1(l_1-\mu'_{11}-1)$
故に $(q+q^3)\mu'_{12}+q^4\mu'_{13}=(1+q^2)(l_1-\mu'_{11}-1)$，これより
$1+q^2\mid\mu'_{13}$，$\mu'_{13}=(1+q^2)t$ とおくと $q(\mu'_{12}+q^3t)=l_1-\mu'_{11}-1$
，$\mu'_{11}=q+q^3-q\mu'_{12}-qt-1$　ここで $t\neq 0$ なら $\mu'_{11}<0$ と
なって矛盾だから $t=0$ すなわち $\mu'_{13}=0$ である。
ここで $\mu'_{12}=0$ ならば $l_1=\mu'_{11}+1$ で $a\cup\Gamma_1(a)$ が (G,Ω) の
1つのblockとなって (G,Ω) がprimitiveであることに反する。故に $\mu'_{12}\neq 0$ である。
ここで $b\in\Gamma_1(a)$ に対して $P_b\ (\leq G_{ab})$ は $\Delta_1(a)$ の各点を固定し
$\Delta_2(a)$，$\Delta_3(a)$，$\Delta_4(a)$ 上にはtransitiveに働き，$\Delta_5(a)$ 上には長さ
q^4 の q コのorbitsに分ける。
又 $\mu'_{12}\geq 1$ より $\mu'_{11}=q+q^3-q\mu'_{12}-1\leq q^3-1$ だから $\Gamma_1(b)\cap\Delta_3(a)$
$=\phi$　$(\Gamma_1(b)=\Delta_1(b)\cup\Delta_3(b))$　従がって $\mu'_{11}=|\Gamma_1(b)\cap\Gamma_1(a)|\leq q-1$
故に前の式より $q^2\leqq\mu'_{12}$，ここで $c\in\Gamma_2(a)$　$(a\in\Gamma_2(c))$ と
すると $P_c\ (\leq G_{ac})$ は Ω 上の作用として $\Delta_1(a)$ 上transitive，
$\Delta_2(a)$ の各点を固定，$\Delta_3(a)$ 上transitive，$\Delta_4(a)$ 上長さ q^3 の q
コのorbitsに分け，$\Delta_5(a)$ 上長さ q^4 の q コのorbitsに分ける
。もし $\Delta_4(a)\subseteq\Gamma_2(c)\cup\Gamma_3(c)$ であれば $\Delta_3(a)\subseteq\Gamma_1(c)$ だから
$\mu'_{12}=|\Gamma_1(a)\cap\Gamma_1(c)|\geqq q^3$，従がって $\mu'_{11}=q+q^3-q\mu'_{12}-1<0$
で矛盾である。それ故 $|\Delta_4(a)\cap\Gamma_1(b)|\geqq q^3$　このときも又

$\mu'_{12} = |\bar{\Gamma}(\alpha) \cap \bar{\Gamma}(\beta)| \leq \xi$ で $\mu'_{12} \geq \xi^2$ に反する。
このように上の場合は起らないことが証明される。
rank 3 で subdegree $1, \xi+\xi^2-\xi^3, \xi^4, \xi^5$ の場合を除く他のすべての場合も同様の計算で矛盾がでる。

文献

[1] D. G. Higman. Finite permutation groups of rank 3. Math. Zeit 86, 145~150 (1964)

[2] D. G. Higman. Intersection Matrices for Finite Permutation Groups. Journal of Alge. 6. 22~42 (1967)