数理解析研究所講究録
第200巻 1974年 69-71

ある種の2-groupについて

電通大　金沢　稔

second maximal class の 2-group についてしらべる。

定義

1. 群 G の部分群 $G_2, G_3, \cdots$ を次のように定める。

$$G_2 = [G, G], \quad G_{i+1} = [G, G_i] \ ; \ i = 2, 3, \cdots$$

2. 2-群 G が

$$|G| = 2^n, \quad cl(G) = r, \quad [G : G_2] = 2^{n-r+1}$$

のとき、性質 $P_{n,r}$ をもつという。

3. 2-群 G が性質 $P_{n,r}$ $(3 \leqq r)$ をもつとき、$C_{G/G_4}(G_2/G_4)$ の G 中での完全逆像を G_1 と定める。

4. 性質 $P_{n,r}$ をもつ群 G が次の条件をみたすとき exceptional group という。

$3 \leqq r$, かつ $2 \leqq i < r$ なるある i に対して

$G_{i+1} = [G_1, G_i]$ が成り立つ。

4'. 性質 $P_{n,r}$ をもつ群 G が exceptional group でないとき non-exceptional group という.

5. 位数 2^n $(4 \leqq n)$ の群 G が $cl(G) = n-2$ のとき second maximal class の 2-群という. (このとき G は性質 $P_{n,\,n-2}$ をみたす)

__定 理 1.__ second maximal class の 2-群は non-exceptional group である.

__定 理 2.__ G が位数 2^n の second maximal class の 2-群のとき, G/G_{n-2} は位数 2^{n-1} の second maximal class の meta-abelian な 2-群である. $(5 \leqq n)$

__定 理 3.__ G が位数 2^n $(4 \leqq n)$ の群で, $[G:G_2] = 2^3$, G_2 に含まれる G の正規部分群が $G_2, G_3, \cdots\cdots$ だけであれば, G は second maximal class の 2-群である.

これらの定理の証明は次の順序で行う. 以下 G は位数 2^n の群とする.

1. G が second maximal class の 2-群であれば次のことが成立する.

(1) G は性質 $P_{n,\,n-2}$ をもつ

(2) G_i $(2 \leqq i \leqq n-1)$ は G_2 に含まれる位数 2^{n-i-1} の G の

唯一の正規部分群である.

(3) G/G_i ($2 \leqq i \leqq n-1$) は位数 2^{i+1} の second maximal class の 2-群である.

2. $cl(G) \geqq n-2$ の non-exceptional group の factor group も non-exceptional group である.

3. $5 \leqq n$ で, G が second maximal class の群で, かつ non-exceptional group のときは, G から次のような元 $x_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots$ がえらべる.

$$G = \langle x_0, G_1 \rangle, \quad G_1 = \langle x_1, y_1, G_2 \rangle,$$

$$G_i = \langle x_i, G_{i+1} \rangle = \langle y_i, G_{i+1} \rangle$$

$$x_i = [x_{i-1}, x_0], \quad y_i = [y_{i-1}, x_0]$$

4. $5 \leqq n$, G が second maximal class の meta-abelian group のとき, G は non-exceptional group となる.