数理解析研究所講究録
第200巻 1974年 76-78



# 有限群のNormalityと Quasi-normalityとについて

神戸商船大　中　村　喜理雄

有限群Gの或部分群Qがすべての部分群と全体として可換のときこれをGのquasi-normal subgroupという。

$$G \,\underline{\underline{q}}\, Q$$

であらわす。この定義はGのnormal subgroupの定義の拡張である。quasi-normalでnormalでない部分群の例は$p$群ですぐつくれる。又定義からquasi-normalityはかなりnormalityに近いことが推測されるが　それをもう少しはつきりさせるため

$$G \,\underline{\underline{q}}\, Q$$

のときQに含まれるGの最大のnormal subgroupを$Q_G$として、$Q_G$をQのcoreとよぶことにし

$$Q/Q_G$$

の構造をみる

これは大分くわしくしらべられて　先づ

Ito－Szep により巾零であることがえられたがその class や交換子列の長さは任意に大きい core-free な quasi-normal subgroup をもつ有限群が構成されてその方向で

$$Q/Q_G$$

をしらべても意味がない　しかし

Peter Schmied－Rudolf Maier による次の結果は興味深い　即ち

$$G \,\underline{q}\, Q$$

のとき $Q/Q_G$ は $G/Q_G$ の Hypercenter に含まれる

これから　G の core free な minimal quasi-normal subgroup は（Ito－Szep により $p$ 群になるが）$p$ と素な位数の G のどの元とも可換であることがえられる。

この他 G の normal subgroup で自明のことも quasi-normal subgroup では未解決のことが多い。例えば normal subgroup の characteristic subgroup はやはり normal になるが normal を quasi-normal におきかえると一般には成立たない。この方向では次の結果、即ち

$$G \,\underline{q}\, Q$$

且 Q の min. normal subgroup N が unique ならば

$$G \,\underline{q}\, N$$

が成立つ。（こゝで N は勿論 Q の char. subgroup である）

特に$G$を$p$群とすると

$$G \overset{q}{\trianglerighteq} Q \ , \quad \Omega_1(Z(Q)) = N$$
$$|W| = p$$

ならば

$$G \overset{q}{\trianglerighteq} N$$

がえられる。（証明はこの方が先である）

## 文献


(1) N. Ito und J. Szép: Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen
Acta Sci. Math. (Szeged)

(2) P. Schmied und R. Maier: Einbettung von Quasinormalteilern in endlichen Gruppen
Math. Zeitschr. (to appear)