

Hecke の予想 について

京大理 土方弘明

1. $\Gamma_0(N) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$ とする。
1936年に、Hecke は“(Nを素数として、weight 2, Haupttypus の) $\Gamma_0(N)$ の modular form は全て、level N の 2次形式 から作る theta 級数の
一次結合として表せるだろう” と予想した (cf.

Hecke: Analytische Arithmetik positiven quadratischen Formen, Kgl. Danske, Vid. Selskab. (12) 1940, p. 100~).

2. 1955年, Eichler によって、この予想は証明された。(Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen, Crelle, (195) 1955, p. 157-).

同時に、彼は N が素数でないとき、上の予想は一般には成立しないことを示した。そして、N が square free という仮定の下に、次のような (一寸おそろしく奇妙な) 命題を証明した。cf. 上に引用したものの、及び

Quadratische Formen und Modul-

funktionen, Acta Arith. (4) 1958, p217~). 従って ν は weight 2 以上を取ってゐるが, 簡単なもの, 以下でほゞ大に示す。

“ $f(\tau) \in \Gamma_0(N)$ の cusp form とし, ξ の ν -~~級~~ 級数展開 at ∞ $\varepsilon f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}$ とする。この ν 次の二次型 ε を $\Gamma_0(N)$ の cusp form $g(\tau) = \sum b_n e^{2\pi i n \tau}$ の存在する。

(i) $g(\tau)$ は level N 以下の二次形式から得られた theta 級数の一次結合。

(ii) $(n, N) = 1$ ならば $a_n = b_n$ 。”

即ち, “level と素ならば” $n \in \mathbb{N}$ を無視すると, theta で書ける” というのである。

2. N と素ならば Hecke 予想 (の仮定) が成立する。これは割合簡単で理由に依る。 M と N の約数, $d \in N/M$ の約数 ($d \neq 1$) とすると, $\Gamma_0(M)$ の cusp form f は自然に $\Gamma_0(N)$ の cusp form と見られるが, 更に $f(d\tau)$ も $\Gamma_0(N)$ の cusp form となり, 従って $f(d\tau)$ は (ν -1) 級数 ε が ν と ν にしか成らない theta で表せる (ν が) 実際, theta で表せる。

4. Atkin-Lehner は $\Gamma_0(N)$ の cusp form f の New form であるというのを次に依つて定義した:

(i) $f(\tau)$ は $\Gamma_0(M)$ ($M|N$) の cusp form $h(\tau)$ 及びその transform $h(d\tau)$ ($d|\frac{N}{M}$) で生成される部分空間の orthogonal complement である

(ii) $f(\tau)$ は Hecke 作用素 T_n ($(n, N)=1$) の同時固有函数である。

そして彼等は $\Gamma_0(N)$ の cusp form の空間は $\Gamma_0(M)$ ($M|N$) の new form $h(\tau)$ 及びその transform $h(d\tau)$ ($d|\frac{N}{M}$) で張られることを示した。(cf. Hecke Operators on $\Gamma_0(m)$ Math. Ann (195) 1970)

5. 5.1.1.3, 4 を並べてみれば, N が合成数のとき $\Gamma_0(N)$ の new form は theta で書けるか? というのが真の問題であることに気がつく。これができれば一般の cusp form は theta とその (±) の (単純な) transform の一次結合で書ける。これが、最近、私と斎藤裕君とで考えた問題であり、答はまさに、その通りであった。実際三宅敏雄君の論文に依り 2.2, f を new form と仮定して述べれば, $f=g$ と結論できる。

つまり

我々は Eichler の証明法 (Hecke 作用素の cusp form の空間の trace と Brandt Matrix の trace を取った) を new form の観点で再考することにより, 2 次のように改良できる。

6. 2. a (i) の N 以下 ε T 度 N の もの (一般には ε 以下にその一部) に限れる。

7. 和の (N が square free と限らば) trace formula (U.S.-Japan Sem. Modern Method in Number theory 1971 に発表) の定性的部分を便し

こととして, N が square free の仮定を N が $T < \varepsilon < \infty$ の一つ simple prime factor ε の

にて $\exists p, N = pN', (p, N') = 1$ p 素. ε

からなることによりできる。

8. 6, 7 の証明には, theta の方は θ new form (の生成する subspace) に当るものを定義する ε が essential である。今迄述べた外見上には全く現れずかつたが, 実際には $\Gamma_0(N)$ の θ の単射群 (の index 2 の部分群) による ε による (\mathbb{Q} 上の algebra $M_2(\mathbb{Q})$ の) order, 及び v (ある意味で θ に対応して ε 因子) \mathbb{Q} 上の definite quaternion の order q (θ の ε の (数論的意味での) 局所的性質が essential である)。

9. N が square free の仮定を落すには, すぐ $\varepsilon < \infty$ かつ今迄扱われていた $\Gamma_0(N)$ 型以外の order q の局所理論が必要である。