数理解析研究所講究録
第201巻 1974年 194-196

混合問題の Green 函数の特異性

京大 数理研　河合隆裕

双曲型方程式に対する初期-境界値混合問題の Green 函数

即ち，時刻 $t=0$ での初期値を $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta(x')\delta(x_n-a) \end{pmatrix}$ $(a>0)$

で与え，$\{x_n=0\}$ での境界値が 0 になる，$P(t,x,D_t,D_x)E=0$ $(t \geqq 0,\ x_n>0)$ の解 E の特異性を考えたい。本講で扱うのは次の2つの場合である。(境界面は常に非特性的と仮定する。)

1° $P(t,x,D_t,D_x)$ の主要部が t 方向に狭双曲型 (あるいは少し一般に多重度一定) かつ境界条件 Lopatinsky 行列式が $\neq 0$，更に，所謂 shadow condition が満たされているとする。この時 $p_m(t,x',x_n;\tau,\eta',\eta_n)\big|_{\substack{x_n=0\\ \eta'=0}}=0$ は τ について 実，単純根のみを持つ (多重度一定ならその多重度に応じる修正を要する。以下同じ)

従って $(t,x';\tau,\eta')$ が $(t_0,x_0';1,0)$ の ある近傍を動く限り そこでは問題は "双曲的" である。実際，その近傍は $p_m=0$，$\dfrac{\partial p_m}{\partial \eta_n}\neq 0$ なる条件を満たし $(t,x';\tau,\eta')=(t_0,x_0';1,0)$ を含む $\sqrt{-1}S^*N$ の連結成分に他ならぬ。ここに $N=\{x_n=0\}$，(t_0,x_0') は最も速い "波" ($(t,x',x_n)=(0,0,a)$ より出る陪特性曲線で最も速く N に達する物) の N への到達点である。従ってこの時は $\partial p_m/\partial \eta_n \neq 0$ 故 陪特性曲線は N と横断的に交わる故，"浜田の方法" により反射波を容易に構成できる。E の特異性が N で反射される

陪特性帯に集中していることは 超函数の制限 積分等の作用と特異性スペクトラムの関係を用いて 初期値問題 の時と同様にできる。(たとえば河合, Publ. RIMS, Kyoto Univ $\underline{7}$ (1971) pp. 363−397 参照) 尚, 一階双曲型の場合は Lewis, J. Math. Mech $\underline{8}$ (1958) pp.571-592 も参照。

2° もう一つの場合は P が 定数係数, 斉次, 境界作用素も斉次 の場合である。この時 $P=a(D)$, 境界作用素を B_p $(p=1,\cdots,k)$ として (但し k は $a(\tau,\eta',\eta_n) = \prod_{j=1}^{m}(\eta_n-\lambda_j(\tau,\eta'))$ として (τ,η') が適当な錐状領域 Γ_0 を動く時 $\mathrm{Im}(\lambda_1),\cdots,\mathrm{Im}(\lambda_k)>0$ととれることが知られているから (たとえば松村; Proc. Japan Acad. $\underline{47}$ (1971) pp. 115−119 参照) その k をとる。) $\Delta(\tau,\xi')=\det(B_p(\tau,\eta',\lambda_j(\tau,\eta'))_{1\le j,p\le k})$,

$$\varphi_j(t,x,s,y;\tau,\eta')=x_n\lambda_j(\tau,\eta')+(t-s)\tau+\langle x'-y',\eta'\rangle$$

を定め, E を

$$\int\sum\frac{1}{\Delta(\tau,\eta')\,\varphi_j^{\,l}(t,x,s,y;\tau,\eta')}\,c_{j,l}\,\omega(\tau,\eta')$$

の形にて求める。(P, B_p いずれも斉次と仮定したのは, ここで係数 $c_{j,l}$ を決めることを容易にするためである。) 以下その特異性は Δ^{-1} の正則な領域 と $\{\varphi_j\neq 0,\ \varphi_j$ 正則$\}$ という領域の共通部分を調べることにより, 被積分函数の特異性スペクトラムを調べ, 通常通り 積分と特異性スペクトラムの関係を

見ればよい。その議論は本質的には(Atiyah-Bott-Gårdingによる)局所化の方法と言ってよい。(たとえば河合, J. Math. Soc. Japan $\underline{24}$ (1972) pp. 481-517 等参照)しかしこの場合 φ の正則な領域を調べる部分が面倒で本質的に平方根型の特異性を持つ λ_j (所謂 Agmon の条件)の場合以外今の所どのようにうまく幾何学的に捕えれるか私には判らない。