数理解析研究所講究録
第202巻 1974年 1-10

有限要素法における理論的諸問題について

東大　宇宙航空研　菊地文雄

1. はじめに

有限要素法は偏微分方程式その他の近似解法として差分法と並んで注目されている手法であり，その実用面における開発はもっぱら構造工学者を中心に行なわれてきているが，近年になって非構造分野への適用や数学的性質の解明などにも大きな関心が寄せられてきている。ここでは有限要素法における理論的諸問題のいくつかについて簡単に述べることにする。この点に関連して Oden (1)，山本 (2)，三好 (3)，三好一藤井 (4) らの解説があり，参考になるところが大きい。

2. 有限要素法についての概要

有限要素法の典型的手法は Ritz - Galerkin 法に基く近似解法であるが，その範囲でみても古典的手法と比較していくつかの特色があり，その上構造力学を中心に発達してきた点とも関連して通常の R-G 法の枠内に入らないものもあり，また極めて大胆な手法が実用的には良好な結果を与えていることもまれではなく，いろいろ興味深いテーマを提供するもの

と思われる。有限要素法では通常領域を二次元の場合の三角形などの形状をした"有限要素"と呼ばれる有限の大きさの副領域に分割する。この有限要素という概念は構造力学の場合には構造要素と微妙に交差しており，その事実が有限要素法を構造力学者にとって扱いやすいものにしている反面，あまりにそれにこだわるととんでもない誤りを犯す可能性が内在ししている。各要素内では厳密解を比較的簡単な関数，通常は区分的な多項式で近似する。もち論，近似関数は要素間の境界である程度の連続性を満足しなければならない。普通一回の計算では有限要素としては全領域でできる限り同じタイプのものを使うし，未知パラメータには要素の節点での近似関数値がなるよう工夫（すなわち補間関数の使用）してあるので，数値計算の手順のかなりの部分が要素単位の同種の作業の繰り返しになり組織的な計算，特に大型計算機によるそれに適しているし，また未知パラメータの物理的意味が明確で結果の整理，解釈にも便利である。さらに要素分割によりかなり複雑な形状のものも扱え，また境界条件として差分法ではかならずしも容易でなかった自然境界条件も比較的処理しやすいことなどもすでに繰返し指摘されているように大きな特長である。なお有限要素法で用いる試験関数は通常 support がかなり local なものが用いられるわけで，そのため得られる

近似方程式は線形問題ではsparseなマトリックスで記述され，この性質を用いて，大次元になりがちな方程式を効率良く解く工夫がなされている。また有限要素法では内積演算が不可避なため，積分演算が必要であるが，しばしば数値積分で処理されるし，すでに述べた要素間の関数の連続性を満足することが困難な場合も少なくないなどいろいろ複雑な問題がある。

線形の平衡問題での有限要素法の収束については，変位法とよばれるものについてはかなり一般的な理論が完成しつつあるようである。誤差のオーダー評価では試験関数が区分的に多項式の補間関数であることを用いてTaylor展開などの手法が活用され，localな評価を積み合さねて全体の誤差のオーダーを調べる。現在，より精密な評価を得るため偏微分方程式に対する高度の知識が要求されるようになっている。

非定常問題や非線形問題に関しては今後いろいろと解決されなければならぬ問題が多そうである。また有限要素法は非構造分野にも当然適用できるが，その際構造力学とはまた異なった様々の方程式の解析が要求され，それに付随して理論的な問題点も多数生じてくると考えられる。

3. 非適合法，ハイブリッド法などについて

簡単なモデル問題として次のポアソン方程式のDirichlet問題を考えよう。実は標題の問題が深刻になるのは板の曲げ

などのより高階の場合であるが，ここでは簡単のためこの問題を扱う。　　$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \quad , \quad u=0 \text{ on } \partial\Omega$ 。 (1)

(1)に対する汎関数 $I_1[u]$ は次式で与えられる．ただし $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ とする。

$$I_1[u] = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] - fu \right\} dx . \qquad (2)$$

簡単のため $\Omega \subset R^2$ とし，さらに $f \in L_2(\Omega)$ である。この場合有限要素として最もよく用いられるのは三角形要素で試験関数としては区分的な多項式が用いられる。その時，境界で若干の近似が入る可能性のあるほかは $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ の範囲で近似関数の空間を構成することはそう困難ではないが，板の曲げ問題では要素間の変位の連続性が上記よりきびしくなる。いま(2)に対し有限要素分割 $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$ を施した段階での表示として

$$I_1^*[u] = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} \left\{ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] - fu \right\} dx dy \qquad (3)$$

が許される。ところが板の曲げ問題などでは，(3)において近似関数として $u^* \notin \mathring{W}_2^1(\Omega)$ なるものを形式的に代入することに相当することが行なわれるときがある。もちろん Ω_i 内では u^* はある程度なめらかで，要素境界でも節点などでは連続性が保たれているのが普通である。しかし要素間境界での変位の不連続性のため，(2)に対して成立した一般論はもはや適用できず，要素間境界による不連続度とそれによる誤差をどのように評価するかが，ここで述べた"非適合法"での収束問題の中心課題である。

上記の非適合法では形式的な変分原理による裏付けも与えられてはいなかった。次にいわゆるLagrangeの未定乗数法を用いることにより得られる様々の変分原理のうちで，一種のハイブリッド変位法について簡単に述べよう。単純化して有限要素は右図に示すように２個だけとする。

非適合法で(3)を用いる時問題なのは$\Gamma_{I\,II}$上で $u|_{I} \neq u|_{II}$ なることである。そこでLagrangeの未定乗数として$\Gamma_{I\,II}$上の関数λを導入して次の汎関数を導く。$d\Gamma$は$\Gamma_{I\,II}$上の線素である。

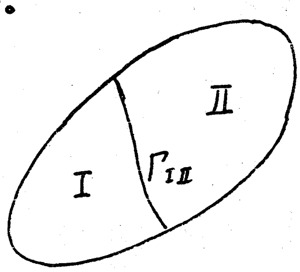

図-1 要素分割

$$
\begin{aligned}
I_2[u,\lambda] = {} & \frac{1}{2}\int_{I} |\mathrm{grad}\, u|^2 dx\,dy + \frac{1}{2}\int_{II} |\mathrm{grad}\, u|^2 dx\,dy \\
& - \int_{\Omega} f u\, dx\,dy + \int_{\Gamma_{I\,II}} \lambda \left(u|_{I} - u|_{II} \right) d\Gamma
\end{aligned} \tag{4}
$$

(4)においてu, λについて変分をとれば停留条件の一つとして $u|_{I} = u|_{II}$ が得られ，さらにλの意味は $\lambda = -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{I} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{II}$ となる。ここにnは$\Gamma_{I\,II}$での I または II の外向き法線で，またλに関する条件により $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{I} + \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{II} = 0$ という要素間境界での平衡条件も得られる。(4)のような汎関数を用いた有限要素法，あるいはその同類はかなり用いられており，経験的には良好な結果を与える場合が少なくない。しかしながらすぐ気付くように(4)の汎関数による変分原理は単なる停留原理で

あり，(1)での最小性などは使えないのであるから，収束の議論はなかなか困難である。収束を保証するためには近似関数の段階で(4)に代入する u と λ にある程度の関連性をつけてスキームの安定性を保証し，さらにそれに応じて近似度を調べる必要があると思われる。このような議論は最近ある程度成果が得られるようになったが，本格的な展開は今後に待たねばならないであろう。[5]

4. 非線形問題について[6]

ここでは主に構造力学の範囲で論ずる。一般に弾性論で扱う線形問題は荷重が小さく，変位，ひずみ，応力が微小な範囲で成立すると考えられているもので，その仮定が成立しなければはるかに複雑な非線形問題として扱わねばならない。この場合代表的な非線形性として次の２つがある。

① 幾何学的非線形……構造物の変形による形状の変化，荷重の向きの変化，内部に発生する応力の効果などに起因する非線形性である。材料特性が線形弾性でも起りうる。

② 材料非線形………応力とひずみの間の関係式(構成方程式)の非線形性に起因するもので，塑性などはその代表例である。

もち論一般には①と②が複合して生ずることが多い。

①の例として図-2に示すような3-ヒンジの骨組を考え

ると，弾性範囲での荷重ー中央変位は大体図-3のようになり，解の唯一性が成立しなくなると共に不安定平衡状態があらわれる。このような解そのものの性質と有限要素解の収束などについて今後考察が必要になるであろう。

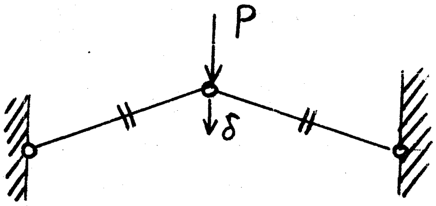

図-2　3-ヒンジ骨組

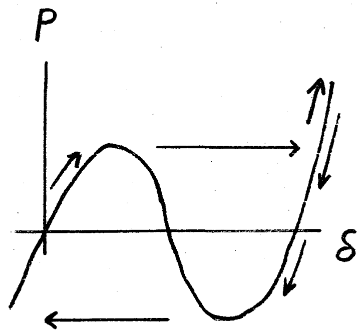

図-3　荷重-変位曲線

②の例として塑性問題を考えると構成方程式が準線形と考える全ひずみ理論的な考えもあるが，むしろ主流は何らかのひずみの増分と応力の増分の間に法則が成立すると考える *flow theory* のようであって，数学的扱いも決して楽でないと思われる。さらに複雑さを与える要因として除荷の問題もある。このような場合の有限要素解や真の解の性質も重要である。

さらに有限要素法で非線形問題を扱う際必要となる非線形方程式の解法には，荷重をいくつかに分割して加え，各荷重ステップでは問題を線形化して解く荷重漸増法や，Newton-Raphson法などの繰り返し法が普通用いられている。このような方法の妥当性や，特に有限要素法と組み合わせた際の誤差評価なども興味深い。

5. 応力の平均化，平滑化法について

一般に変位法で才一に求められるのは変位，それも節点変位であるが，実用上さらに重要なのはその微分に大体相当するひずみもしくは応力である。その際求めた変位からひずみ－変位関係式を通して計算された応力は通常要素間で不連続なばかりでなく，実際に計算してみるとかなり細かい要素分割でもとなりの要素とかなり飛びがあり，ばらつくことが多い。特に一定ひずみ要素ではそうで，ことに塑性の降伏の判定で苦労することが多い。このような場合，いくつかの要素の応力を平均化してやると経験上かなり"まともな"値が得られることが少なくない。このような手法は多くの解析で用いられていることと思う。この点に関して山本，徳田の研究がある。[(7)]

また得られた不連続な応力を変位と同程度の基底の張る空間に射影して連続化する Oden などの手法もあるが，[(8)]彼らの理論的根拠としている所は感覚的にはもっともな点もあるが厳密な立場からは極めて疑わしく思われる。

このような手法は実用的には非常に重要であり，何らかの数学的意味付けが可能になれば益すること大であると思う。

6. その他

曲った境界を近似するため，要素として"曲った三角形"などを使うアイソパラメトリック要素がかなり用いられている。[(9)]

この形式の要素では変位の補間と形状の補間が同じ種類の補間関数によりなされており適合性の条件は満足されるのであるが，補間多項式が曲がってしまうことや数値積分による誤差が重大になる。

また非構造分野で有限要素法が用いられるにつれ，熱，拡散，流体などに関連して構造とはいろいろ異った種類の困難が生じてきているようである。それは定式化に始まり数値解法の安定性などいろいろな方面にわたっている。

一般に有限要素法で問題を解析する際，自然（もしくは社会）現象のモデル化の時点の数学的check，有限要素モデルのcheck，有限要素解を求める手法など各段階で様々な困難が生じてきており，今後数学的な考察が大いに必要になるものと考えられる。このようにいろいろな困難さが増大しているのは有限要素が期待されて広く用いられるようになってきたことが主因であるから，その責任も重大であろう。

〈参考文献〉

(1) J. T. Oden : "Some Aspects of Recent Contributions to the Mathematical Theory of Finite Elements" in Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design edited by J. T. Oden, R. W. Clough and Y.

Yamamoto , IJAH Press (1972) 3－38

(2) 山本, "有限要素法の誤差論" 第22回応力連合講演論文抄録集, (1972) 113－124

(3) 三好 "有限要素法について" 日本数学会応用数学分科会講演予稿集 (1972, 4) 124－143

(4) 三好, 藤井 "差分法, Rayleigh－Ritz－Galerkin法, 有限要素法, bit 5 (1973) 239－245

(5) 三好, 藤井 "高階の微分方程式にたいする有限要素法, ハイブリッド法と混合法" bit 5 (1973) 417－422

(6) 山田 (編) : マトリックス法の応用, 東大出版 (1972)

(7) Y. Yamamoto and N. Tokuda "A Note on Convergence of Finite Element Solutions", Int. J. Numer. Meth. in Engng. 4 (1971) 485－493

(8) J. T. Oden and H. J. Brauchli, "On the Calculation of Consistent Stress Distributions in Finite Element Applications." Int. J. Numer. Meth. in Engng. 3 (1971) 317－325

(9) ホランド・ベル (川井監訳) : 有限要素法――応力解析への応用, 朝倉 (1972)

(9)には有限要素法の実際の使用において用いられる様々の経験的手法にも触れていて興味深い。