

有限要素解析における
数値誤差の一傾向

CRC 武田 洋

1. 序 文

最近、有限要素法の理論と大型電子計算機の使用とにより複雑かつ大型の問題がこの方法により解析されている。しかし、解析結果が使いものにならなくなってしまうことがあり、その起因が問題となる。ここで、この原因について考えてみると、二種類の有限化による誤差をあげることができる。その一は有限要素法に由来する誤差であり、これは解析すべき連続体を部分連続の場の集合に近似することによって生じるもの、即ち、離散化誤差 (discretization error) である。また、その二は、電子計算機内部での数値表に由来する誤差であり、これは実数体を浮動小数点数と呼ばれる有限かつ不連続な数の集合として表わし、その演算を行うために生じるもの、即ち、数値誤差 (numerical error) である。ここでは、有限要素解析における数値誤差の起因について概

説し、有限要素モデルが結果におよぼす数値誤差を構造解析を例に検討する。

2. 有限要素解析における数値誤差

連続体や構造系を有限要素法を用いて解析する場合、数値誤差を生じやすいタイプは次のようなものである。

- (1) 異種の有限要素を併用する場合 … 例えばシェル構造を膜要素と板曲げ要素で組み立てる場合のように要素の自由度が異質で、その特性関係がちがう場合
- (2) 非常に剛性の異なる材料からなるモデル … 例えば基礎と上部構造を一緒に解析する場合
- (3) ある荷重条件のもとで、比較的大きな剛体変形とする場合
- (4) 有限要素の辺長比の大きな場合

上記の項目で(1)~(3)は有限要素法を用いて離散すべき連続作用素の性質に関するものがあり、(4)は定義域(または作用素)の離散化に関するものである。なお上記のすべての場合、その剛性マトリックス(離散作用素)の元数が大きくなるにつれ、結果におよぼす数値誤差を増大すると考えられる。さらに数値誤差の原因を電子計算機の観点から考えてみると

- (1) 入力データの不確定性

(2) 計算実行中の丸め

(3) 構造全体の剛性マトリックスを計算する際に、低次の固有値に関する数値（変位モード）の打ち切りが考えられ、(3)が最も大きな意味を持つことが Roy により認められている。

(1) 入力データの不確定性

変位法に基づく有限要素法の平衡方程式は次のようになる。

$$[K]\{r\} = \{R\} \quad (1)$$

ここで $[K]$, $\{r\}$, $\{R\}$ はそれぞれ、構造の剛性マトリックス、変位ベクトル、荷重ベクトルである。まず $\{R\}$ が不確定性 $\{\delta R\}$ を持っているものとし、結果 $\{r\}$ におよぼす不確定性を $\{\delta r\}$ とすると (1) 式は次のようになる。

$$[K](\{r\} + \{\delta r\}) = \{R\} + \{\delta R\} \quad (2)$$

ここで両辺のノルムをとり整理すると

$$\frac{\|\delta r\|}{\|r\|} \leq \|K\| \cdot \|K^{-1}\| \frac{\|\delta R\|}{\|R\|} = \text{cond}([K]) \frac{\|\delta R\|}{\|R\|} \quad (3)$$

となる。ここで $\text{cond}([K])$ は $[K]$ の条件数であり、ユークリッドノルムを用いる場合、最大固有値を λ_{\max} 、最小固有値を λ_{\min} とすると次のようになる。

$$\text{cond}([\mathbf{K}]) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (4)$$

次に $[\mathbf{K}]$ が不確定性 $[\delta\mathbf{K}]$ を持つ、この場合に(1)式は次のようになる。

$$([\mathbf{K}] + [\delta\mathbf{K}])(\{\mathbf{r}\} + \{\delta\mathbf{r}\}) = \{\mathbf{R}\} \quad (5)$$

(5)式の両辺のノルムをとり、 $\|\delta\mathbf{K}\|/\|\mathbf{K}\|$ として整理すると

$$\frac{\|\delta\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}\|} \leq \text{cond}([\mathbf{K}]) \frac{\|\delta\mathbf{K}\|}{\|\mathbf{K}\|} \quad (6)$$

となる。(3),(6)式より、入力データの不確定性が結果におよぼす影響は、条件数の値によって非常に大きく拡大される可能性があることを示している。しかし(3)式は非常に大めの見積りであり、また(6)式で表わされた剛性マトリックス $[\mathbf{K}]$ の不確定性 $[\delta\mathbf{K}]$ は一般の場合、直接に基本的な入力データの不確定性に影響されないといわれている。

(2) 丸め誤差

一般に浮動小数点数は $\pm d_1 d_2 \dots d_t \times \beta^e$ と表わせるから、実数 x を浮動小数点数 x_R で置きかえると

$$x_R = x(1 + \delta) \quad \text{ただし } |\delta| \leq \beta^{1-t}/2 \quad (7)$$

であり、1回の演算を行った場合の丸め誤差も同程度である。

Royによれば、丸め誤差の影響は微小であり、丸め誤差だけをとりのぞくことは危険であることが数値実験より示されている¹⁾。

(3) 打ち切り誤差

構造の剛性マトリックス $[K]$ は次のように表わせる。

$$[K] = \sum_{i=1}^n \lambda_i \{v_i\} \{v_i\}^T \quad (8)$$

ここで n は $[K]$ の元数であり、 λ_i , $\{v_i\}$ は固有値および固有ベクトルである。また添字 T は転置を表わす。従って、逆マトリックスは次のようになる。

$$[K]^{-1} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i} \right) \{v_i\} \{v_i\}^T \quad (9)$$

(8), (9) 式より低次の固有値と高次の固有値の間に大きなひらきがあると、電子計算機内部では $[K]$ の低次固有値に関するモードが打ち切られてしまい、そして $[K]^{-1}$ では $[K]$ の低次固有値に関するモードが大きな意味を持つが、 $[K]$ から $[K]^{-1}$ の計算においては打ち切られた数値を回復することはできない。このことより、 P を使用する電子計算機の10進桁数、打ち切り誤差を考慮した場合の有効桁を S とすると、近似的に次のように表わせる。

$$S = P - \log [\text{cond}([K])] \quad (10)$$

(4) 荷重条件と数値誤差

荷重ベクトル $\{R\}$ の影響は (10) 式に含まれていないから、これを考慮するために次のように表わす。

$$\{R\} = l_R \sum_{i=1}^n C_i \{V_i\} \quad (11)$$

ここで $l_R = \|R\|$, $C_i = \{V_i\}^T \{R\} / l_R$ ($-1 < C_i < 1$) である。
 (1) 式を $\{r\}$ について解き (9), (11) 式を考慮すると次のようになる。

$$\{r\} = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i} \right) \{V_i\} \{V_i\}^T \right] l_R \left[\sum_{i=1}^n C_i \{V_i\} \right] \quad (12)$$

ここで直交性を考慮することにより次のようになる。

$$\{r\} = l_R \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{\lambda_i} \{V_i\} \quad (13)$$

これより荷重ベクトルが低次の固有ベクトルに直交する場合には (10) 式の評価よりも数値的に良好となる。

(5) エネルギー相対誤差

有限要素の剛性マトリックスを $[k]$, 要素節点での変位ベクトルを $\{P\}$ とすると、構造系の仕事と有限要素系の仕事の差 E_w は次のように表わせる。

$$E_w = \{r\}^T \{R\} - \{P\}^T [k] \{P\} \quad (14)$$

数値誤差が存在しなければ $\epsilon_w = 0$ である。ここで数値誤差を評価するために“エネルギー-相対誤差” ϵ_{rw} も次のように定義する。²⁾

$$\epsilon_{rw} = \frac{\epsilon_w}{\{r\}^T \{R\}} \quad (15)$$

(15)式は計算終了後の数値誤差の評価のために用いられる。

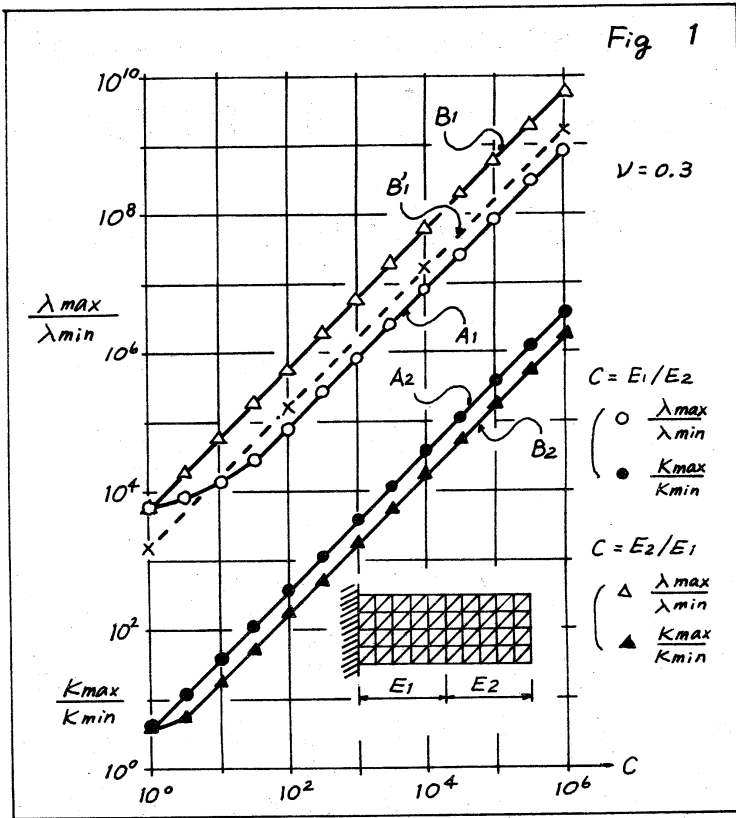
3. 構造解析モデルと数値誤差に対する考察

前節までに有限要素解析における数値誤差の基本事項を述べてきたが、ここでは数値誤差が発生すると考えられる要因に着目し、それらの要因が数値誤差におよぼす影響を定量的に把握するために行った数値実験の結果を示し、その傾向について論じる。なお、これらの数値誤差に対する物理的に考察する方法が山本によ、論じられている。³⁾

(1) 剛性が異なる場合

Fig 1 に片持梁について、その支持端側が自由端側に比較して剛性の大きい場合(線A)とその逆の場合(線B)について、その剛性の比を変化させた場合の条件数および剛性マトリックスの対角成分の最大値と最小値の比を示した。なお、各線で示した B_1' は剛性マトリックスの元数が約 $1/2$ の場合であり、 B_1 と B_1' が平行であるから、条件数の変化におよぼ

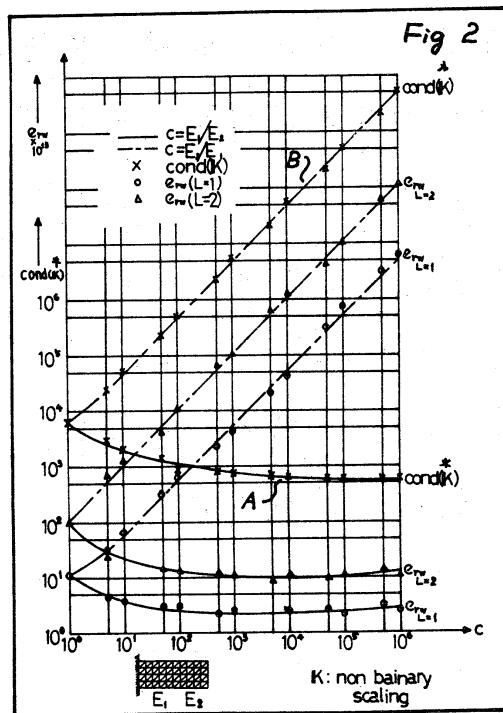
す剛性比の影響だけをとりだして考えられる。このモデルに関しては条件数の増大と剛性比の増大とはほぼ等しいと考えられる。従ってこの関係と(10)式とを結びつけることにより、弾性係数



が異なる構造系(連続体)を解析する場合の桁落ちの可能性を次式のように推定できる。

$$f_1 = c_1 \log [E_{max} / E_{min}] \quad (16)$$

ここで f_1 は桁落ち, c_1 は定数である。Fig 1 では A, B の場合とも同じ傾向を示しているが, A の場合は見掛け上の条件の悪さであり, 剛性マトリックスに



対して式(13)に示すスケーリングを行ない、スケールされた剛性マトリックス $[K^*]$ の条件数を Fig 2 に示す。

$$[K] = [D]^T [K^*] [D] \quad (17)$$

ただし、

$$D_{ij} = \delta_{ij} \sqrt{K_{ij}}$$

$$K_{ij}^* = \frac{K_{ij}}{\sqrt{K_{ii} K_{jj}}}$$

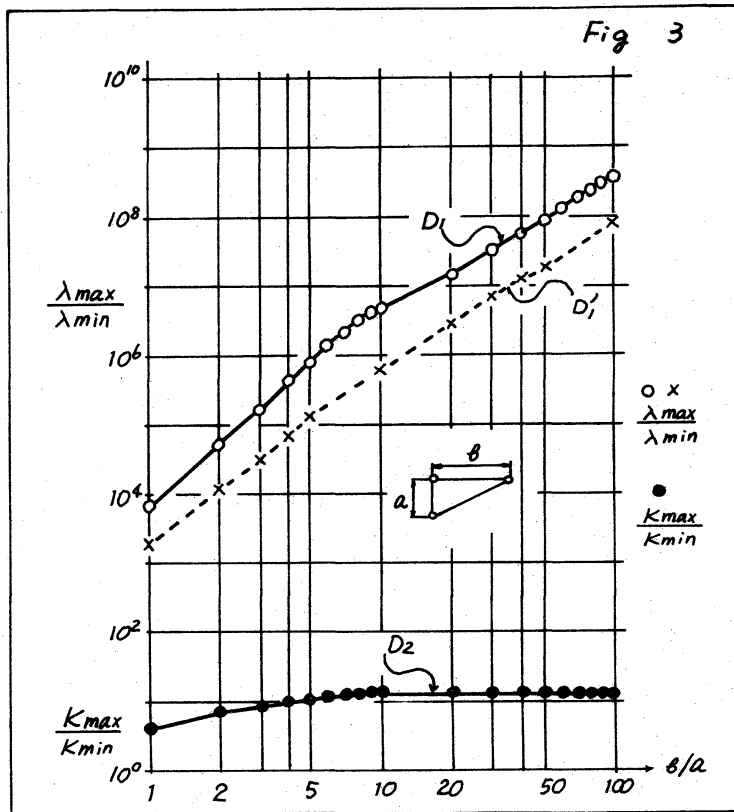
Fig 2 ではエネルギー-相対誤差も示しているが、ここでは2種類の荷重について計算した。Fig 2 における $L=1$ は軸方向引張り、 $L=2$ は剪断を先端に作用させた場合である。これよりエネルギー-相対誤差が条件数と密接に関係しており、さらに(13)式の影響を評価している。したが、エネルギー-相対誤差を計算後の数値誤差の見積りとして用いることは有効であることが予想される。

(2) 有限要素の幾何学的形状と数値誤差

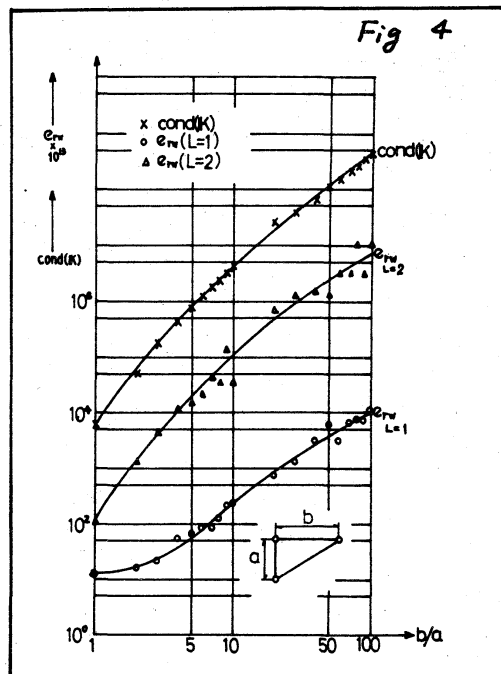
Fig 3 に Fig 1 と同様のメッシュで要素の幾何学的寸法を変化させた場合の条件数および剛性マトリックスの対角成分の最大値と最小値の比を示す。Fig 1 と同様に点線 D_i は剛性マトリックスの元数が約 $1/2$ の場合であり、この場合も剛性比の変化の場合と同じように、条件数と要素形状の変化だけの関係を推定できよう。ただし、ここで得た結果は平

面問題のための Simplex モデルである。
 Fig 3 より有限要素の幾何学的形状の数值誤差の影響を大まかに推定すると次のようになるう。

$$f_2 = C_2 \log [(b/a)_{max}] \quad \dots (18)$$



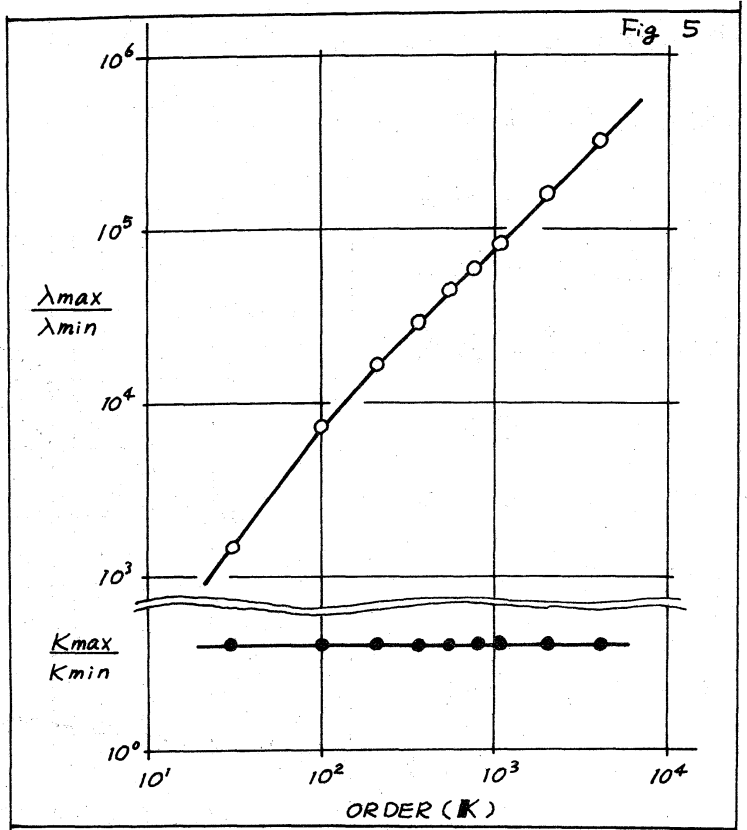
また Fig 3 より条件数を剛性マトリックスの対角成分から簡単に推定することは不可能である。また有限要素モデルの観点からも b/a が大きい場合、一般には離散化誤差も大きくなるから、辺長比の大きい有限要素の使用は避けるべきであるう。 Fig 4 には条件数とエネルギー相対誤差を示すが、これよりエネルギー



- 相対誤差が数値誤差の評価に有効であることがわかる。

(3) 剛性マトリックスの元数と数値誤差

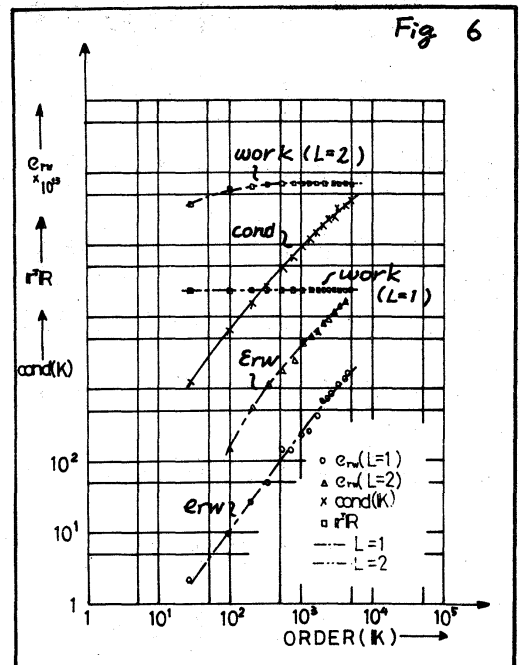
有限要素解析において適合モデルを用いる場合には、要素分割をこまかくするにしたがって、真の解



への収束が保証されるが、実際の場合にはこれは成立しない。Fig 5 に示すように要素分割をこまかくするにつれ数値誤差を増大することがわかる。この影響は次のようになる。

$$f_3 = C_3 \log(\text{order}[K]) \quad (19)$$

Fig 6 にはエネルギー相対誤差と外力のなすエネルギーの状態



を示すが、この場合もエネルギー-相対誤差の有効性がわかる。

(4) 剛性比と辺長比の数値誤差への影響

Fig 1, 2 では辺長比が一定の場合につき剛性比の数値誤差への影響を示したが、Fig 7 では剛性比も同様に变化させ (E_2 のみ) $b/a = 2, 4$ とした場合の条件数とエネルギー-相対誤差を示す。これより、辺長比が増すにつれ、条件数とエネルギー-相対誤差は同傾向で増してゆくことがわかる。

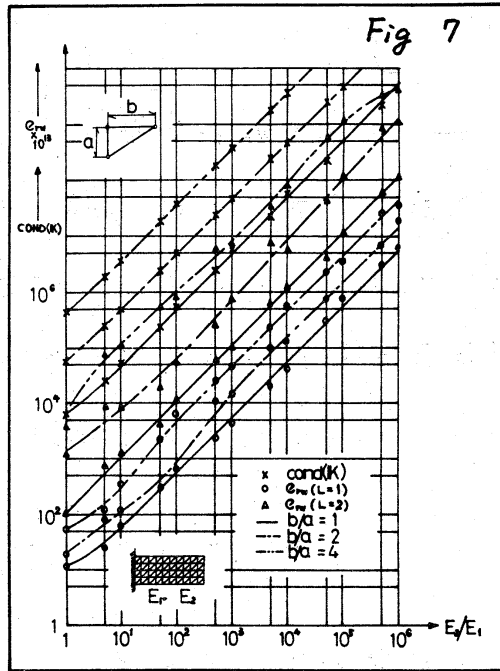
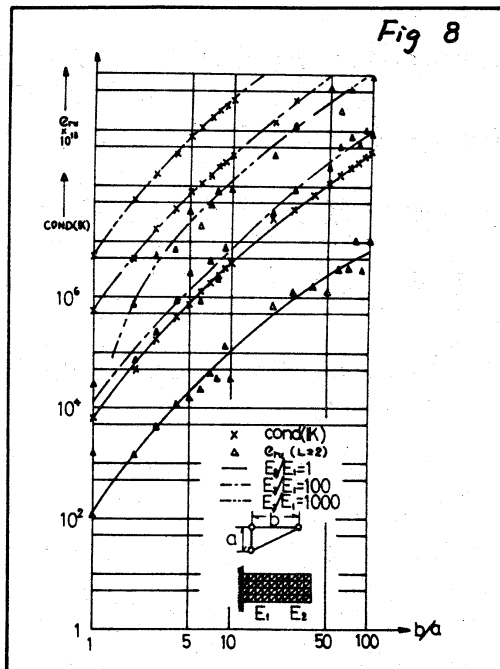


Fig 8 には Fig 7 とは逆に辺長比を Fig 3, 4 と同様に变化させ、剛性比 $E_2/E_1 = 100, 1000$ とした場合の条件数とエネルギー-相対誤差を示す。これも Fig 7 と同傾向である。



(5) 考察

単純化した要因について数値実験を行ったが、実際に解析すべき構造や連続体には種々の要

因が含まれており、これを計算に先だち完全に把握することはむずかしいが、工学的見地から考えると、以上の数値実験から

節点数	元数	E_2/E_1	a	b	cond(K)	有効桁	桁落ち	f
55	100	100	1	1	5.27+05	8.4	6.0	4.0
55	100	1000	1	1	5.26+06	7.4	7.0	5.0
55	100	10000	1	1	5.26+07	6.4	8.0	6.0
99	180	100	1	2	1.71+06	7.9	6.5	5.09
99	180	1000	1	2	1.71+07	8.9	7.5	6.09
99	180	10000	1	2	1.71+08	5.9	8.5	7.09
187	340	100	1	4	5.78+06	7.4	7.0	6.22
187	340	1000	1	4	5.77+07	6.4	8.0	7.22
187	340	10000	1	4	5.77+08	5.4	9.0	8.22

Table 1

ら予想できることは、個々の要因を別々に考え、それらの影響を加えることにより、非常に大まかであるが発生する数値誤差の可能性を考慮することができる。即ち、いままでのべながら、た要因による桁落ちを f_0 とし、全桁落ちを f とすると

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \quad (20)$$

なる目安がたえられる。この評価を条件数から得られたものと比較したものが Table 1 であり、Table 1 における f には f_0 は含まれていない。なお計算後の評価としてはエネルギー相対誤差が有効であろう。

参考文献

- 1) J.R.Roy "Numerical error in structural solutions" ASCE Vol.97 ST4, 1971
- 2) R.J.Melosh "Manipulation errors in computer solution of critical size structural equations" NAS5-10369, 1970
- 3) 山本善久 "有限要素法の条件数" 日本鋼構造協会第5回大会, 研究集, 1971
- 4) 武田洋 "有限要素法と数値誤差について" 土木学会全国大会, 1971
- 5) 武田洋, 斎藤昭弘 "有限要素法と数値誤差について(その2)" 土木学会全国大会, 1972