数理解析研究所講究録
第205巻 1974年 39-48

Lower part eigenvalue の漸近分布

名大 理　田村 英男

§1. 序

$A(D)$ を正値自己共役楕円型作用素，$\rho(x)$ を正値な函数，無限遠で 0 に近づくとする。もし $\rho(x)$ の減衰が余り速くないならば，$A-\rho(x)$ は原点に集積する負の固有値をもつ。いま $n(r)$ を $A-\rho$ の $-r$ より小さい負の固有値の個数（多重度も含めた意味で）として，$r\to 0$ の漸近挙動を調べるのが本稿の目的である。

例えば Schrödinger 作用素 $-\Delta-\frac{1}{|x|}$ を考えると上の作用素は $-\frac{1}{4j^2}$ $(j=1,2,\dots)$ 多重度 j^2 の負の固有値をもつ。従って $n(r)=\frac{1}{24}r^{-\frac{3}{2}}+o(r^{-\frac{3}{2}})$ となる。

Schrödinger 作用素に対する研究は Brownell–Clark [2], McLeod [3] がある。方法は本稿の方法とは異なる。

§2. 仮定と主定理.

$A(D)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$; 定数係数 楕円型微分作用素で次の仮定を満足するものとする.

(i) $A(D)=\sum_{|\alpha|=m_0+1}^{m} a_\alpha D^\alpha+\sum_{|\alpha|=m_0} a_\alpha D^\alpha=A_1(D)+A_0(D)$

ここで $0<m_0\le m$, m_0 偶数

(ii), $A(\xi)\ge C|\xi|^{m_0}$ for ${}^\forall\xi\in R^n$.

(iii) $A_0(\xi)\ge C|\xi|^{m_0}$ for ${}^\forall\xi\in R^n$.

$p(x)$ として次の条件を満足する class を考える.

$p(x)\in K(l,a)$, $(l>0,\ a>0)$

(i) $p(x)=p_1(x)+p_2(x)$

(ii) $p_1(x)$ は smooth, positive な函数.

更に $\lim_{|x|\to\infty}|x|^l p_1(x)=a$

(iii) $p_2(x)$ は compact support をもつ.

non-negative な函数.

(iv) $p_2(x)\in L_p$, $p=1$ if $m\ge n$

$p>\frac{n}{m}$ if $m<n$.

一般に $A-p(x)$ の自己共役作用素としての定義域 $\mathcal{D}(A-p)$ は $H^m(R^n)$ ではないが,

$\mathcal{D}((A-p+C)^{\frac{1}{2}})=H^{\frac{m}{2}}(R^n)$ となることがわかる.

Theorem: $A(D)$ を上の条件を満足する微分作用素, $p(x)$ は $K(l,a)$ に属する. (但し $0<l<m_0$)

その時

$$n(r) = (2\pi)^{-n}\,\omega\,S/n\cdot a^{\frac{n}{\ell}}\,r^{\frac{n}{m_0}-\frac{n}{\ell}} + o\left(r^{\frac{n}{m_0}-\frac{n}{\ell}}\right)$$

ここで　$\omega = \int (A_0(\xi)+1)^{-\frac{n}{\ell}}\,d\xi$, S は $(n-1)$ 次元単位球の表面積.

Remark; $n(r)$ の Leading term に従来の eigenvalue の漸近分布と異なり, $A(D)$ の principle part が, 本質的役割を果さない。また上の結果は, $A(D)$ が homogeneous な微分作用素の場合には, 変数係数の場合にも拡張される。

§3. 証明の方針 ($A(D)$ が homogeneous).

次のことはよく知られた事実である.

$n(r)$ = maxmal dimension of subspace such that $\{\, u \mid (Au - pu) < -r(u,u)$, i.e. $(Au+ru) < (pu,u)$, $u \in C_0^\infty(R^n) \,\}$

次の固有値問題を考える.

$$(3.1) \qquad Au + ru = \mu\, pu$$

上の事実から $n(r)$ は (3.1) の固有値問題の $\mu<1$ を満足する固有値の個数に等しい。ここで $r = \frac{1}{\lambda}$ $(\lambda \to \infty)$ とおくと,

$$(3.2) \qquad \lambda Au + u = h\, pu.$$

$N_\lambda(h)$ を (3.2) の固有値問題の h より小さい

固有値の個数と定義すれば,

$$(3.3) \qquad n(r) = N_\lambda(\lambda) \qquad (\lambda = \tfrac{1}{r}).$$

以下, parameter λ をもつ固有値問題 (3.2) の漸近分布を考える. この§では $A(D)$ を homogeneous 楕円型作用素, 即ち $A(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ とおく.

(オ一段) ; $p(x)$ が smooth, 即ち $p(x) = p_1(x)$ のとき, 定理が成立すれば, $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$ のとき成立する ;

簡単のために $a \equiv 1$, とする, 次の補題が必要である.

補題 3.1. (Birman - Solomjak [1])

$p_2(x)$ は上の条件を満足する函数. $M(h)$ を固有値問題 $Au = h p_2 u$ の漸近分布函数とすれば,
$$M(h) = (2\pi)^{-n} w_0 \int p_2(x)^{\frac{n}{m}} dx \; h^{\frac{n}{m}} + o(h^{\frac{n}{m}})$$
ここで $\quad w_0 = meas\{\xi \mid A(\xi) \le 1\}$.

補題 3.2. ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ に対して, $(A+r)^{-1} p_2$ は少なくとも 1 つ固有値を $(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{3})$ の中にもつ.

補題 3.3. $m(r, \varepsilon)$ を作用素 $(A+r)^{-1} p_2$ の固有値で, ε より大きいものの個数と定義すれば,
$$m(r, \varepsilon) \le C(\varepsilon).$$
$C(\varepsilon)$ は r に対して独立である.

補題 3.4. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $r(\varepsilon)$ が存在して，任意の r （$0 < r < r(\varepsilon)$）に対して，$(A+r)^{-1}p_1$ は少なくとも一つ，固有値を $(1-\varepsilon, 1)$ の中にもつ．

上の補題 3.1 〜 3.4 から

(3.4) $\quad n(r) \leq n(r, \frac{1}{1-\varepsilon}p_1) + C(\varepsilon)$.

ここで，$n(r, \frac{1}{1-\varepsilon}p_1)$ は固有値問題

$$Au - \frac{1}{1-\varepsilon}p_1 u = \mu u$$ の $-r$ より小さい固有値の個数.

(3.4) から

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\, r^{\frac{n}{\ell}-\frac{n}{m}}\, n(r) \leq C_0(\varepsilon)$$

ここで $\quad C_0(\varepsilon) = (2\pi)^{-n}\omega\frac{S}{n}\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{n}{\ell}}$.

ε は任意であるので

(3.5) $\quad \overline{\lim_{r\to 0}}\, r^{\frac{n}{\ell}-\frac{n}{m}}\, n(r) \leq C_0(0)$.

(3.6) $\quad \underline{\lim_{r\to 0}}\, r^{\frac{n}{\ell}-\frac{n}{m}}\, n(r) \geq C_0(0)$,

(3.6) の証明はやさしい．

(3.5) と (3.6) より主張が証明される．

（第2段）；（作用素 $A - p_1$ に対する lower part eigenvalue の漸近分布）．

$\lambda Au + u = h p_1 u$ の固有値問題は同値な固有値問題

(3.7) $\quad p_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda A + 1)p_1^{-\frac{1}{2}}u = hu$.

に変換される。

今 k (integer) を $2km>n$, $2kl>n$, を満足するようにとる。

(3.8) $(p_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda A+1)p_1^{-\frac{1}{2}})^{2k} = p_1^{-k}((\lambda A+1)^{2k}+\sum_{i=1}^{2k}\lambda^i Q_i)p_1^{-k}$

ここで、Q_i は微分作用素で、

$Q_i=\sum_{|\beta|=0}^{m_i-1} b_{(i,\beta)}(x)D^{\beta}$, $|b_{i\beta}(x)|\le C_{i\beta}\,p_1(x)^{\frac{m_i-|\beta|}{l}}$ を満足する。

$B=\sum\lambda^i Q_i$, ($B=B^*$), $p_1^{2k}=g$ とおく。

Resolvent equation により、

(3.9) $g^{\frac{1}{2}}((\lambda A+1)^{2k}+B+h^{2k}g)^{-1}g^{\frac{1}{2}}$

$= g^{\frac{1}{2}}((\lambda A+1)^{2k}+h^{2k}g_0)^{-1}g^{\frac{1}{2}}$

$+ g^{\frac{1}{2}}((\lambda A+1)^{2k}+h^{2k}g_0)^{-1}g^{\frac{1}{2}}\cdot h^{2k}(g_0-g)((\lambda A+1)^{2k}+B$
$+h^{2k}g)^{-1}g^{\frac{1}{2}}$

$- g^{\frac{1}{2}}((\lambda A+1)^{2k}+h^{2k}g_0)^{-1}B((\lambda A+1)^{2k}+B+h^{2k}g)^{-1}g^{\frac{1}{2}}$

ここで $g(x_0)=g_0$, $x_0\in R^n$ は任意に固定されたものとする。

$\{\mu_j, \varphi_j(x)\}$ を固有値問題(3.7)の固有値とそれに対応する固有函数として、(3.9)を作用すれば、次の積分方程式を得る (cf. Titchmarch [4])

(3.10) $\varphi_j(x_0)/\mu_j^{2k}+h^{2k}$

$= g^{\frac{1}{2}}(x_0)\int K(\lambda,h)(x_0,y)\,g^{\frac{1}{2}}(y)\varphi_j(y)\,dy$

$$+\left(h^{2k}\Big/\mu_j^{2k}+h^{2k}\right) g^{\frac{1}{2}}(x_0)\int K_{\lambda,h}(x_0,y)\left(g_0-g(y)\right)g^{-\frac{1}{2}}(y)\varphi_j(y)\,dy$$

$$-\ 1\Big/\mu_j^{2k}+h^{2k}\ g^{\frac{1}{2}}(x_0)\int K_{\lambda,h}(x_0,y)\,B(D)\,g^{-\frac{1}{2}}(y)\varphi_j(y)\,dy.$$

$$\equiv a_j(x_0)+b_j(x_0)+d_j(x_0)\qquad (j=1,2,\cdots)$$

ここで $K_{\lambda,h}(x_0,y)=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x_0-y)\cdot\xi}\left((\lambda A+1)\xi^{2k}+h^{2k}g_0\right)d\xi.$

(3.10) の両辺を2乗して, j について加えて, x_0 について積分すれば,

(3.11)

$$\sum_j \frac{1}{(\mu_j^{2k}+h^{2k})^2}=\int\sum_j a_j^2(x_0)\,dx_0+\int\sum_j b_j^2(x_0)\,dx_0$$

$$+\cdots\cdots\quad+\int\sum_j d_j^2(x_0)\,dx_0,.$$

(3.11) の右辺を評価することによって任意の $\varepsilon>0$ に対して, $h\geqq\max\left(h(\varepsilon),C(\varepsilon)\lambda^{\beta}\ (\beta<1)\right)$ のとき

(3.12)

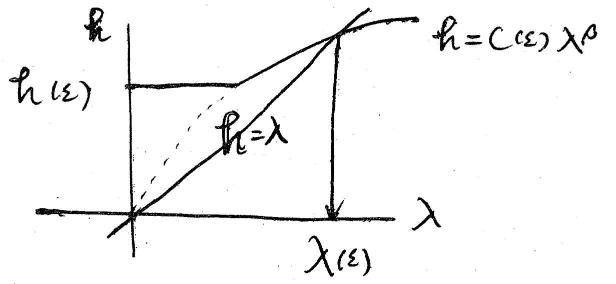
$$\sum_j 1\Big/(\mu_j^{2k}+h^{2k})^2=C\lambda^{-\frac{n}{m}}h^{\frac{n}{\ell}-4k}+\lambda^{-\frac{n}{m}}\varepsilon\, h^{\frac{n}{\ell}-4k}.$$

が成立する. ここで $h(\varepsilon)$ は λ に対して独立である。従って Hardy-Littlewood の Tauber 型定理により

(3.13) $N_\lambda(h)=C\lambda^{-\frac{n}{m}}h^{\frac{n}{\ell}}+\lambda^{-\frac{n}{m}}\varepsilon\, h^{\frac{n}{\ell}}$

$\quad$ if $h\geqq\max\left(h(\varepsilon),C(\varepsilon)\lambda^{\beta}\right)$

ここで $h(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$ は 上の $h(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$ とは必ずしも一致しない。



従って　$\lambda > \lambda(\varepsilon)$ のとき

$$N_\lambda(\lambda) = C\lambda^{\frac{n}{\ell}-\frac{n}{m}} + o(\lambda^{\frac{n}{\ell}-\frac{n}{m}})$$ となり

主張が証明される.

§4. 証明の方針 (inhomogeneous の場合)

(補題4.1)　$\{\mu_j(\lambda)\}_{j=1}^{\infty}$ eigenvalue of problem

$\lambda A + u = h p_1 u$ のとき

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_j(\lambda)+h)^k} \le C(k)\lambda^{-\frac{n}{m_0}} h^{\frac{n}{\ell}-k}.$$

if　$h \ge C\lambda^{\beta(k)}$　($\beta(k)<1$, k integer, $k>\frac{n}{\ell}$)

前の§と同様に　次の積分方程式が成立する.

(4.1)
$$\left(\frac{1}{\mu_j+h}\right)\varphi_j(x_0) = p_1^{\frac{1}{2}}(x_0)\int K(\lambda,h)(x_0,y)\, p_1^{\frac{1}{2}}(y)\varphi_j(y)\,dy$$
$$+\left(\frac{h}{\mu_j+h}\right) p_1^{\frac{1}{2}}(x_0)\int K(\lambda,h)(x_0,y)(p_1(x_0)-p_1(y))\,p_1^{-\frac{1}{2}}(y)\varphi_j(y)\,dy$$

ここで　$K(\lambda,h)(x_0,y) = (2\pi)^{-n}\int e^{i(x_0-y)\cdot\xi}(\lambda A(\xi)+1+h\,p_1(x_0))^{-1}\,d\xi.$

(4.1) を $2k$(十分大きくとる) 回 h について微分すると

(4.2) $\varphi_j(x_0)/(\mu_j+h)^{2k+1} = p_1^{\frac{1}{2}}(x_0)\int K(\lambda,h)(x_0,y)^{(2k)}p_1^{\frac{1}{2}}(y)\varphi_j(y)\,dy$

$+ h\sum_{s=0}^{2k} C_s\, 1/(\mu_j+h)^{s+1}\, p_1^{\frac{1}{2}}(x_0)\int K(\lambda,h)(x_0,y)^{(2k-s)}(p_1(x_0) - p(y))\, p(y)^{-\frac{1}{2}}\varphi_j(y)\,dy$

$+ \sum_{t=0}^{2k} C_t\, 1/(\mu_j+h)^{t}\, p_1^{\frac{1}{2}}(x_0)\int K(\lambda,h)(x_0,y)^{(2k-t)}(p_1(x_0) - p(y))\, p(y)^{-\frac{1}{2}}\varphi_j(y)\,dy.$

$\equiv a_j(x_0,\lambda,h)$

$+ h\sum_{s=0}^{2k} C_s\, 1/(\mu_j+h)^{s+1}\, b_{(j,s)}(x_0,\lambda,h)$

$+ \sum_{t=1}^{2k} C_t\, 1/(\mu_j+h)^{t}\, d_{(j,t)}(x_0,\lambda,h)$

$(j=1,2,\cdots)$

(4.2) の両辺を2乗して, j について加えて x_0 について積分する

(補題4.2)

$$\sum_j \int \frac{1}{(\mu_j+h)^{2t}}\, d_{j,t}^2(x_0,\lambda,h)\,dx_0 \le C(t)\lambda^{-\frac{n}{m_0}} h^{\frac{n}{2}-(4k+2)}\, O(\lambda^{\beta}h^{-\alpha})$$

ここで $\alpha>\beta>0$.

上の補題4.2を使って

$\sum_j \frac{1}{(\mu_j+h)^{4k+2}}$ の $h\to\infty$ での漸近挙動が得られる。

参考文献

[1] M. Š. Birman and M.E. Solomjak.
Leading term in the asymptotic spectral formula for non-smooth elliptic problems
Fun analysis and its app 4. 1–13 (1970)

[2] F.H. Brownell and C.W. Clark
Asymptotic distribution of the eigenvalues of the lower part of the Schrödinger operator spectrum J. Math. Mech 10
31–70 (1961)

[3] J.B. McLeod
The distribution of the eigenvalues for the hydrogen atom and similar cases
Pro London. Math Soc 11. 139–158 (1961)

[4] E.C. Titmarsh
Eigenfunction Expansion Vol II.