数理解析研究所講究録
第206巻 1974年 30-49

X上の A(X) metric

北大 理　林 実樹広

序.　平面上の uniform algebra A(X), R(X) に対して, trivial でない Gleason part の各点が, Gleason metric の孤立点でないということは Browder [2] の定理としてよく知られている. このことが bounded point derivation の場合にも一般化出来ることを [7] で示めした. 先頃送られて来た James Li-ming Wang 氏の論文 [8] では, 更に一般に, 高階の bounded point derivation に対しても成立することが, 著者の論文とは独立に, 別の観点から一般化された形で示めされている. §1ではこれについて述べる. この論文の idea を使えば, capacity による Estimate が高階の場合に対しても同様に計算されることが分かる. これを§2に述べる. これで A(X), R(X) に関しての [7] の結果は高階の bounded point derivation の場合にもすべて成立することになる.

また講演時において, A(X) が hypo-dirichlet algebra のと

き A(X) と R(X) による X 上の Gleason metric が等しければ, A(X) = R(X) となるということを, admissible (仮称) という条件のもとで述べた. その後, 証明の essential な部分が Bishop の定理からすぐわかること, しかも admissible という条件が不用になることが Gamelin から指摘された. これにより証明はほとんど自明になったが, §3 で簡単にふれることにした.

§1. bounded point derivation on A(X)

X は複素平面上の compact set とし, X 上の複素数値連続関数で, X の内部 X° で analytic なもの全体を A(X) とする. $x \in X$ に対して, A(X) の元で x の近傍に analytic に延長されるもの全体を $A(X;x)$ とする. Arens の lemma から $A(X;x)$ は A(X) で uniformly dense な subalgebra である. triviality を避けるため x は X の孤立点でないとする.

$t = 1, 2, \ldots$ として, $f \in A(X;x)$ に対して functional D_x^t を

$$D_x^t : f \longmapsto \frac{1}{t!} f^{(t)}(x)$$

によって定義する. ここで, $f^{(t)}(x)$ は普通の意味の x における n 階の微分係数である. D_x^t が bounded のとき, 先に述べたことから, D_x^t は A(X) 上に一意に延長され, bounded linear functional となる. これを x における t-th order

の bounded point derivation という．以下では単に t-point derivation ということにする．

さて，X上の A(X)-metric（Gleason metric）は

$$\|x-y\|^A = \sup\{|f(x)-f(y)| : f\in A(X), \|f\|\leq 1\}$$

により定義される．1-point derivation に関して，次の事柄は互いに同値である．

(1.1) x における 1-point derivation が存在する．

(1.2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(E_n(x;r,a)\setminus X^\circ)}{(ra^n)^2} < \infty$; $E_n(x;r,a)=\{z; ra^{n+1} < |z-x| < ra^n\}$, $0<a<1$ （Hallstrom [6]）

(1.3) x における complex 表現測度 μ があって

$$\int\frac{d|\mu|}{|z-x|} < \infty \qquad \text{(Wilken [9])}$$

(1.4) x に収束する点列 $x_n\in X$ があって，すべての $f\in A(X)$ に対して，$\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$ は収束する（[7]）．

(1.5) $\underline{\lim}\frac{\|z-x\|^A}{|z-x|} < \infty$ （[7]）．

実は，(1.1), (1.2), (1.3) は同じ形で t-point derivation の場合にも成立する（[6], [9]）が，(1.4) と (1.5) については新に記号を定義する必要がある．以下 Wang に従って，これを述べる．$f\in A(X;x)$ に対して $A(X;x)$ 上の operator R_x^t を

$$f(z) = f(x) + (z-x)D_x^1 f + \cdots + (z-x)^t D_x^t f + R_x^t f(z)$$

によって定義する．$D_x^1, D_x^2, \ldots, D_x^t$ が bounded ならば，

R_x^t も $A(X)$ 上の bounded operator に拡張出来る. また $y \in X$ に対して, $A(X;x)$ 上の linear functional $R_{x,y}^t$ を

$$R_{x,y}^t \ : \ f \longmapsto R_x^t f(y)$$

により定義する. $h \in \mathbb{C}$ として, 関数 f に対して, $\Delta_h f = f(z+h) - f(z)$ を定義される範囲内で z の関数とし, $\Delta_h^j = \Delta_h \circ \Delta_h^{j-1}$ (for $j > 1$) とする. $f \in A(X)$ とすると $\Delta_h^j f(z)$ は $z, z+h, \cdots, z+jh$ がすべて X に含まれような z に対してのみ定義される.

t-point derivation に関して, 次は同値である.

(t.1) x における t-point derivation が存在する.

(t.2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(E_n(x;r,a) \setminus X^\circ)}{(ra^n)^{t+1}} < \infty$ (Hallstrom [6])

(t.3) x における complex 表現測度 μ があって

$$\int \frac{d|\mu|}{|z-x|^t} < \infty$$ (Wilken [9])

(t.4) x に収束する点列 $x + h_m \in X$ があって, すべての $f \in A(X)$ に対して $\Delta_{h_m}^t f(x) / (t!\, h_m^t)$ は収束する. (Wang [8])

(t.5) $\displaystyle\varliminf \frac{\| R_{x,z}^{t-1} \|}{|z-x|^t} < \infty$ (Wang [8]).

(t.4) 及び (t.5) から (t.1) が導びかれることは容易にわかる (c.f. [7]). 逆が Wang の結果であるが, 彼は Browder の議論をもっと一般的な形で証明して, その他いくつかの興味ある結果を得ている.

記号： $x\ (\in X)$ は固定して，$\Delta_n = \{z : |z-x| < \frac{1}{n}\}$ とする．平面上の area measure を $dm\ (= dxdy)$ とする．

[定義] 平面上の可測集合 E が

$$\lim_n \frac{m(E \cap \Delta_n)}{m(\Delta_n)} = 1$$

をみたすとき，E は x において full area density を持つという． 関数 F に対して，x に full area density をもつ集合 E が存在して，E 上では $F(z) \to a$ (as $z \to x$) となるとき，

$$\operatorname{app}\lim_{z \to x} F(z) = a$$

と書く．

[定義] 開区間 $(0, +\infty)$ 上で定義された正値 (>0) で，広義の増加関数 φ が "admissible" とは，$\tilde{\varphi}(r) = \frac{r}{\varphi(r)}$ が広義の増加関数で $\tilde{\varphi}(+0) = 0$ となることをいう． 更に $\int_0^1 \frac{dr}{\varphi(r)} < \infty$ となるとき，"nice admissible" という．

Example: $\varphi(r) = r^\alpha \quad (0 < \alpha < 1)$

及び，$r_0 > 0$ を十分小さいものとして

$$\varphi(r) = \begin{cases} r\left(\log \frac{1}{r}\right)^\beta & \text{for } 0 < r < r_0 \\ r_0\left(\log \frac{1}{r_0}\right)^\beta & \text{for } r_0 < r \end{cases} \quad (\beta > 1)$$

はともに nice admissible function である．

さて，開区間 $(0, +\infty)$ 上の正値で，広義の増加関数 ψ に対して，平面上の測度 μ の ψ-potential は

$$U_\mu^\psi(z) = \int \frac{d|\mu|(\zeta)}{\psi(|\zeta - z|)}$$

によって定義される． $1/\psi(|z|)$ が $dm\ (=dxdy)$ に関して locally summable ならば，U_μ^ψ も dm に関して locally summable となることはすぐわかる． とくに $\psi(r) = r$ のとき，

$U_\mu^\psi(z) = \tilde{\mu}(z) = \int \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta - z|}$ は Newton potential である．

ここで，$\delta > 0$ に対して

$$E_\mu^\psi(\delta) = \{ y \in \mathbb{C} : \psi(|y - x|)\, U_\mu^\psi(y) < \delta \}$$

$$E_\mu(\delta) = \{ y \in \mathbb{C} : |y - x|\, \tilde{\mu}(y) < \delta \}$$

によって，集合 $E_\mu^\psi(\delta)$，$E_\mu(\delta)$ を定義しておく．

次が Browder の補題の一般化である．

補題 1． φ を admissible 関数，α を X 上の測度として

$$\frac{1}{m(\Delta_n)} \int_{\Delta_n} \tilde{\varphi}(|z - x|)\, U_\alpha^{\tilde{\varphi}}(z)\, dm(z) \longrightarrow |\alpha|(\{x\}) \quad (\text{as } n \to \infty)$$

系 2． $\alpha(\{x\}) = 0$ ならば，$E_\alpha^{\tilde{\varphi}}(\delta)$，$E_\alpha(\delta)$ は x において full area density をもつ．

この補題は，更に，次の様に一般化されている．

補題 1′． E を平面上の Borel set として，$\pi \rho_n^2 = m(\Delta_n \setminus E)$，$dm_n = \frac{n}{\rho_n}\, dm|_{\Delta_n \setminus E}$ とする． ここで，$dm|_{\Delta_n \setminus E}$ は dm を $\Delta_n \setminus E$ に切った測度である． φ，α は前と同じとして，更に $\alpha(\{x\}) = 0$ とする． このとき，

$$\int \tilde{\varphi}(|z - x|)\, U_\alpha^{\tilde{\varphi}}(z)\, dm_n(z) \longrightarrow 0 \quad (\text{as } n \to \infty).$$

補題1′の証明はBrowderの論法と変わるところはないが，その相似性をはっきりさせるために，ここでは補題1の方を証明しよう：

$$F_n(w) = \frac{1}{m(\Delta_n)}\int_{\Delta_n} \frac{\tilde{\varphi}(|z-x|)}{\tilde{\varphi}(|w-z|)}\,dm(z)$$

とおく． $F_n(x) = 1$ で， $w \neq x$ に対しては

$$F_n(w) \leqslant \frac{\tilde{\varphi}(\frac{1}{n})}{\tilde{\varphi}(|w-x|-\frac{1}{n})} \quad (\longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty).$$

また，任意の $w \in \mathbb{C}$ に対して，

$$F_n(w) \leqslant \frac{\tilde{\varphi}(\frac{1}{n})}{m(\Delta_n)}\int_{\Delta_n}\frac{dm(z)}{\tilde{\varphi}(|w-z|)} \leqslant \frac{\tilde{\varphi}(\frac{1}{n})}{m(\Delta_n)}\int_{\Delta(w;\frac{1}{n})}\frac{dm(z)}{\tilde{\varphi}(|w-z|)}$$

$$= \frac{\tilde{\varphi}(\frac{1}{n})}{m(\Delta_n)}\int_{\Delta(0;\frac{1}{n})}\frac{dm(z)}{\tilde{\varphi}(|z|)} = 2\tilde{\varphi}(\tfrac{1}{n})\cdot\frac{1}{(\frac{1}{n})^2}\int_0^{\frac{1}{n}}\varphi(r)\,dr$$

$$\leq 2\tilde{\varphi}(\tfrac{1}{n})\cdot\frac{\varphi(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})} = 2.$$

よって，補題はLebesgueの収束定理の結果である．

系2は次の不等式から明らかである：

$$\frac{m(\Delta_n \setminus E_\alpha^{\tilde{\varphi}}(\delta))}{m(\Delta_n)} \leqslant \frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{m(\Delta_n)}\int_{\Delta_n}\tilde{\varphi}(|y-x|)\,U_\alpha^{\tilde{\varphi}}(y)\,dm(y).$$

さて，xにおける t-point derivation D_x^t があれば，(t.3)よりcomplex表現測度μがあって

$$\int\frac{d|\mu|}{|z-x|^t} < \infty$$

となる． もちろん $|\mu|(\{x\}) = 0$ である． このとき，適当

な (nice) admissible関数 φ を作って

$$(*)\qquad \int \frac{d|\mu|}{|z-x|^t\,\varphi(|z-x|)} < \infty$$

と出来ることは容易に想像されよう.

<u>定理3</u>. φ を admissible関数, $t = 0, 1, 2, \cdots$ とする.
$(*)$をみたす complex 表現測度 μ があれば, x における order t までの point derivation が存在して, $f \in A(X)$ は

$$f = \sum_{j=0}^{t} (z-x)^j D_x^j f + R_x^t f, \quad R_x^t f \in A(X)$$

と書かれる. 更に

$$(\star)\qquad \mathrm{app}\lim_{z\to x} \frac{R_x^t f(z)}{|z-x|^t\,\varphi(|z-x|)} = 0$$

$$(\star\star)\qquad \mathrm{app}\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h^t f(x)}{t!\,h^t} = D_x^t f$$

が, すべての $f \in A(X)$ に対して成立つ.

<u>証明</u>: はじめの部分は, Wilken の定理 (t.3) よりわかる.
よって, 定数 $C > 0$ があって $\|R_x^t f\| \le C\|f\|$ for $f \in A(X)$.
$(*)$から測度

$$\lambda_j = \frac{\mu}{(z-x)^j}\ (0 \le j \le t), \quad \sigma = \frac{\lambda_t}{\varphi(|z-x|)}$$

が定義される. $f \in A(X; x)$ のとき, $R_x^t f \in A(X; x)$ となり, $R_x^t f$ は x において $t+1$ 次の零点をもつ. よって

$$(**)\qquad \int R_x^t f\, d\lambda_j = 0 \qquad \text{for}\quad 0 \le j \le t.$$

R_x^t は bounded operator 故，これはすべての $f \in A(X)$ に対して成立つ．$\forall \varepsilon > 0$ を fix して，$\delta = \frac{\varepsilon}{2C+\varepsilon}$ とおく．

$$E_\varepsilon = E_\mu(\delta) \cap E_\alpha(\delta) \cap E_\alpha^{\tilde{\varphi}}(\delta)$$

とすれば，系2から，E_ε は x において full area density をもつ．$c(y) = 1 + (y-x)\hat{\mu}(y)$，$\hat{\mu}(y) = \int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - y}$ とすれば，$y \in E_\varepsilon$ のとき，$|c(y)| \geq 1 - \delta > 0$ 故 $y \in X$．しかも $\frac{1}{c(y)} \frac{z-x}{z-y} d\mu(z)$ は y の complex 表現測度となる．よって $\int R_x^t f \, d\mu = 0$ より

$$R_x^t f(y) = \frac{1}{c(y)} \int R_x^t f \, \frac{z-x}{z-y} \, d\mu = \frac{y-x}{c(y)} \int R_x^t f \, \frac{d\mu}{z-y}.$$

ここで，簡単な計算より，

$$\frac{d\mu}{z-y} = \left(\frac{1}{z-x} + \frac{y-x}{(z-x)^2} + \cdots + \frac{(y-x)^{t-1}}{(z-x)^t} + \frac{(y-x)^t}{(z-x)^t(z-y)} \right) d\mu$$

$$= \sum_{j=1}^{t} (y-x)^{j-1} d\lambda_j + (y-x)^t \frac{\lambda_t}{z-y}$$

であるから，(＊＊) により

$$R_x^t f(y) = \frac{(y-x)^{t+1}}{c(y)} \int R_x^t f \, \frac{d\lambda_t}{z-y}.$$

φ が admissible 関数ということから $\varphi(r_1 + r_2) \leq \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$ (for $r_1, r_2 > 0$) となることが容易に確められる．これから

$$\tilde{\lambda}_t(y) = \int \frac{\varphi(|z-x|)}{|z-y|} d\alpha \leq \int \frac{\varphi(|z-y|) + \varphi(|y-x|)}{|z-y|} d\alpha$$

$$= U_\alpha^{\tilde{\varphi}}(y) + \varphi(|y-x|)\tilde{\alpha}(y).$$

従って，$y \in E_\varepsilon$ に対しては

$$
\begin{aligned}
|R_x^t f(y)| &\leq \frac{1}{|C(y)|}|y-x|^{t+1}\,\|R_x^t f\|\,\tilde{\lambda}_p(y) \\
&\leqslant \frac{C\|f\|}{1-\delta}|y-x|^{t+1}\left(\mho_\alpha^{\tilde\varphi}(y)+\varphi(|y-x|)\tilde{\alpha}(y)\right) \\
&= \frac{C\|f\|}{1-\delta}|y-x|^{t}\varphi(|y-x|)\left(\tilde\varphi(|y-x|)\mho_\alpha^{\tilde\varphi}(y)+|y-x|\tilde{\alpha}(y)\right) \\
&\leq \frac{2\delta C}{1-\delta}\|f\|\,|y-x|^{t}\varphi(|y-x|) \\
&= \varepsilon\,\|f\|\,|y-x|^{t}\varphi(|y-x|).
\end{aligned}
$$

これより (☆) がわかる. 実際, $L_y f = \dfrac{R_x^t f(y)}{|y-x|^t\varphi(|y-x|)}$ とすると, $\{L_z\}_{z\in E_\varepsilon}$ は $A(X)$ 上の一様有界な *linear functional* の族である. 一方 $f\in A(X;x)$ に対しては, $L_y f\to 0$ (as $y\to x$) であるから, $f\in A(X)$ に対しても $L_y f\to 0$ (as $y\to 0$, $y\in E_\varepsilon$) となる. さて, $F_j=\{h\in\mathbb{C}:\ x+jh\in E_\varepsilon\}$ $(0<j\leq t)$ とおくと, 各 F_j は x において full area density をもつから, $F=\bigcap_{j=1}^{t}F_j$ も x において full area density をもち, 今示めしたことから

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in F}} \frac{R_x^t f(x+jh)}{h^t} = 0 \qquad \text{for}\quad 0\leq j\leq t.$$

一方, 多項式 P に対しては, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^t P(x)}{t!\,h^t} = D_x^t P$ となるから, $\Delta_h^t R_x^t f(x)$ が $R_x^t f(x+jh)$ $(0\leq j\leq t)$ の finite combination であることに注意すれば, (☆☆) がわかる. (終)

メモ: $\{L_y\}_{y\in E_\varepsilon}$ が $A(X)$ 上の *linear functional* として E_ε 上 strongly に 0 に収束することを示めした訳であるが,

εを動かしてE_εから新しい集合Eを作って，E上 uniformly に0に収束するようにも出来る． なお，後に述べる系9を参照のこと．

補題1′の方からは，次のことがわかる．

<u>定理4</u>． 仮定は定理3と同じとして，$P_\varepsilon = \{y\in X : \|y-x\|^A<\varepsilon\}$とおく． このとき，$n\to\infty$としたときの$m(\Delta_n\setminus P_\varepsilon)$の0に近ずく速さは

$$m(\Delta_n\setminus P_\varepsilon) = o\left(\frac{\varphi(\frac{1}{n})^2}{n^{2t+2}}\right).$$

従って，高次の point derivation が存在すれば，それだけ Gleason part のxにおける密度が濃く在っている．

これまでの議論では，(*) をみたす admissible 関数φが，とにかくあるというだけで，具体的にどういうものかは分らない． しかし，次の一見驚異的なことがすぐわかる．

<u>補題5</u>． φを nice admissible 関数とすると，ほとんどすべて(dm)の non peak point に対して，yの complex 表現測度μ_yがあって

$$\int \frac{d|\mu_y|(z)}{\varphi(|z-y|)} < \infty .$$

<u>証明</u>： 任意の non peak point $x\in X$に対して，xの表現測度μで，$\mu(\{x\})=0$となるものがある． そこで

$$F = \{y\in\mathbb{C} : \int \frac{d|\mu|(z)}{|z-y|\varphi(|z-y|)} < \infty \}$$

とおけば，　φ が "nice admissible" のときは $\frac{1}{|z|\varphi(|z|)}$ は dm に関して locally summable であるから，　$m(\mathbb{C}\setminus F) = 0$.
よって，$0<\delta<1$ に対して，$E = F \cap E_\mu(\delta)$ とおけば，E は x において full area density をもち，$y \in E$ に対して，
$\mu_y = \frac{1}{c(y)} \frac{z-x}{z-y}\mu$ （$c(y) = 1 + (y-x)\hat{\mu}(y)$）は条件をみたす y の complex 表現測度となる．　x は non trivial な Gleason part の任意の元であることから，補題がわかる．

系6.　$\varphi(r) = r(\log \frac{1}{r})^{\frac{3}{2}}$ として，ほとんどすべて (dm) の non peak point に対して

$$m(\Delta_n \setminus P_\varepsilon) = o\left(\frac{(\log n)^3}{n^4}\right).$$

以上が Wang の結果の紹介である．　もちろん $R(X)$ の場合についても同じ結果が成立する．　実は，補題5と系6は $R(X)$ の場合について意味があるが，$A(X)$ の場合は，ほとんどすべての non peak point は X の内部 X° にあるので，自明である．

メモ：　bounded point derivation が唯1点しかないような $R(X)$ が作くれる（O'Farrel [4]）．　従って，系6を高次の point derivation に拡張することは出来ない．

§2.　Capacity estimates for t-point derivation.

1-point derivation に関しては，点列 $\{x_n\}$ が (1.4) をみたすための必要十分条件が capacity を用いてあらわせることを[7]で示したが，t-point derivation の場合にも同様に出来ることがわかった．

$r>0,\quad 0<a<1$ に対して

$$E_n(x;r,a)=\{z\in\mathbb{C}\,;\ ra^{n+1}<|z-x|<ra^n\}$$

とする．更に整数 $M\leqq N$ ($=\infty$ も可) に対して

$$\alpha_t^{M,N}(x;r,a)=\frac{1}{(1-a)a^t}\sum_{n=M}^{N}\frac{\alpha(E_n(x;r,a)\setminus X^\circ)}{(ra^n)^t}$$

とおく．$M=0$，$N=\infty$ の場合には簡単に $\alpha_t(x;r,a)$ と書くことにする．

<u>補題7</u>．$0<a,b<1$ とする．このとき，a,b によって定まる宇宙定数 $C(a,b)$，$C'(a,b)$ があって

$$C'(a,b)\,\alpha_t(x;r,b)\leqq\alpha_t(x;r,a)\leqq C(a,b)\,\alpha_t(x;r,b)$$

が成立つ．

従って，以下に述べる性質は，a として $0<a<1$ となる任意の数を固定して考えてよい．

$\delta>0$，$0<\alpha<1$ として，$r>0$ を十分大きく取って $X\subset\Delta(x;r)$ とする．記号は §1 と同じとして，$A(X)$ に関して次の Estimate が成立つ．[C：宇宙定数とする]

(I) $\dfrac{2(1-a)}{et(t+1)a^{t-1}} \cdot \dfrac{\alpha_{t+1}(x;\delta,a)}{\alpha_1(x;\delta,a)+3a^2} \leqq \|D_x^t\| \leqq \dfrac{C}{2\pi}\,\alpha_{t+1}(x;r,a)$

(II) $\|R^t_{x,y}\| \geqq \dfrac{a-a^2}{e(1-\sigma)^{t+1}} \cdot \dfrac{\alpha_1(y;\sigma|x-y|,a)}{\alpha_1(y;\sigma|x-y|,a)+\frac{a^2}{1-a}(t^2+t+1)}$

(III) $\|R^t_{x,y}\| \leqq C\,|x-y|^t \Big[\dfrac{\sqrt{|x-y|}}{\sqrt{r}-(1+\sigma)\sqrt{|x-y|}}\,\alpha_{t+1}(x;r,a)$

$$+\frac{1}{\sigma}\,\alpha^{k,\infty}_{t+1}(y;r,a)+\frac{1}{(1-\sigma)^{t+1}}\cdot\frac{\alpha_1(y;\sigma|x-y|,a)}{|x-y|^t}\Big]$$

ただし、 $k=\Big[\log_a\sqrt{\dfrac{|x-y|}{r}}\Big]$ (ガウス記号)

(III′) $\|R^t_{x,y}\| \leqq C\,|x-y|^{t+1}\Big[\dfrac{4}{\sigma}\,\alpha_{t+2}(x;r,a)+\dfrac{1}{(1-\sigma)^{t+1}}\,\dfrac{\alpha_1(y;\sigma|x-y|,a)}{|x-y|^{t+1}}\Big]$

定理8. x における t-point derivation が存在すると仮定する。このとき、x_n を x に収束する点列として、$A(X)$ 上の linear functional R^{t-1}_{x,x_n} に対して、

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty}\frac{R^{t-1}_{x,x_n}f}{(x_n-x)^t}=D^t_x f \quad \Big[\!\Big[\, u\text{-}\lim_{n\to\infty}\frac{R^{t-1}_{x,x_n}f}{(x_n-x)^t}=D^t_x f\,\Big]\!\Big]$$

となるための必要十分条件は、

$$\overline{\lim_n}\ \frac{\alpha_1(x_n;\sigma|x_n-x|,a)}{|x_n-x|^t}<\infty \quad \Big[\!\Big[\, \lim_n\frac{\alpha_1(x_n;\sigma|x_n-x|,a)}{|x_n-x|^t}=0\,\Big]\!\Big].$$

系9. $h_n=x_n-x$ として、

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta^t_{h_n}f(x)}{t!\,h_n^t}=D^t_x f \quad \Big[\!\Big[\, u\text{-}\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta^t_{h_n}f(x)}{t!\,h_n^t}=D^t_x f\,\Big]\!\Big]$$

44

となるための必要十分条件は，すべての $k=1,2,\cdots,t$ に対して

$$\overline{\lim_{n}} \frac{\alpha_1(x+kh_n;\alpha k|h_n|,a)}{|x_n-x|^t}<\infty \quad \left[\!\left[\lim_{n} \frac{\alpha_1(x+kh_n;\alpha k|h_n|,a)}{|x_n-x|^t}=0 \right]\!\right].$$

Estimate (II) を得るには，$f_n \in \mathcal{AE}(E_n(y;\delta,a)\setminus X^\circ)$ に対して，$g_n=f_n'(\infty)-(z-y)f_n(z)$ の∞における Laurent 展開

$$g_n(z)=\frac{a_1}{z-x}+\frac{a_2}{(z-x)^2}+\cdots\cdots$$

を考えて

$$h_n(z)=(z-x)a_t+\cdots\cdots+(z-x)^t a_1-(z-x)^{t+1}g_n(z)$$

とおき，関数 $\sum_{n=0}^{N}\frac{h_n}{\delta a^n}$ を用いて標価すればよい．ただし，$\delta=\alpha|x-y|$ とする． (I) は Hallstrom [6] に従って求まる． (III) 及び (III′) は [7] と同様である． 以上は，

$$\gamma_t^{M,N}(x;r,a)=\frac{1}{(1-a)a^t}\sum_{n=M}^{N}\frac{\gamma(E_n(x;r,a)\setminus X)}{(ra^n)^t}$$

とおいて，$\alpha_t^{M,N}$ を $\gamma_t^{M,N}$ に書き変えれば，R(X) について同じことが成立つ．

§3. 各点有界近似と Gleason metric.

A(X)，R(X) による X 上の Gleason metric をそれぞれ $\|x-y\|^A$，$\|x-y\|^R$ であらわすことにして，ここでは次の問題を考える．

(Q) $\quad \|x-y\|^A = \|x-y\|^R$ on $X \Rightarrow A(X)=R(X)$?

この問題を考えたのは以下の理由による. §1, §2で述べたように capacity, 表現測度及び Gleason metric は $A(X)$, $R(X)$ においては, 互いに関連し合っている. 一方, $A(X)=R(X)$ となるための条件として capacity を用いた Vistushkin の条件, 表現測度を用いた Glicksberg-Garnett の条件があるのだから, Gleason metric を用いた条件もあってよいではないか! 実際, Vistushkin の条件とは粗っぽくいって, 2つの capacity $\alpha(\Delta_x\setminus X^\circ)$ と $\gamma(\Delta_x\setminus X)$ が比例するということであり, 一方 Estimate $(\mathrm{II})_{t=0}$, $(\mathrm{III})_{t=0}$ によれば, $\|R^\circ_{x,y}\| = \|x-y\|^A$ であるから, $\|x-y\|^A$ は $\alpha_1(x;r,a)$ に比例していると思える. $R(X)$ に関しても同じ Estimate が成立しているから, $\|x-y\|^A$ と $\|x-y\|^R$ が比例すれば $A(X)=R(X)$? という問題が考えられるのである.

部分的ではあるが, 次のことが示せる.

<u>定理 10.</u> $A(X)$ を hypo-dirichlet algebra とするとき, $A(X)=R(X)$ となるための必要十分条件は, $\|x-y\|^A=\|x-y\|^R$ on X.

この定理は, 次の定理から得られる.

定理11. X^0の各連結成分が，finitely connected とすれば，$A(X)$ 〚$R(X)$〛 が $H^\infty(X^0)$ で各点有界 dense であるための必要十分条件は，X^0上で $\|x-y\|^A = \|x-y\|^{H^\infty}$ 〚$\|x-y\|^R = \|x-y\|^{H^\infty}$〛 となることである． ただし，$H^\infty(X^0)$ は X^0上の有界正則解析関数の全体，$\|x-y\|^{H^\infty}$ は，$H^\infty(X^0)$による Gleason metric とする．

$A(X)$ が hypodirichlet のとき，X^0の各連結成分が finitely connected であり，$A(X)$ が $H^\infty(X^0)$ で各点有界 dense となることが知られているので，$\|x-y\|^A = \|x-y\|^{H^\infty}$ となる． 従って， 定理11が示めされれば，この場合 [5] により $C(X) \cap H^\infty(X^0) = R(X)$ となるので，定理10が得られる．

定理11 の証明は三段階に分かれる．

Step 1. X^0が連結の場合に reduce する： $\lambda = dxdy|X^0$ として， $H^\infty(\lambda)$ を $A(X)$ 〚$R(X)$〛 の w*-closure とする． 仮定より X^0の各連結成分は唯一つの Gleason part に含まれている．従って， Davie による $H^\infty(\lambda)$ の元の $A(X)$ 〚$R(X)$〛 による各点有界近似の定理を用いれば，X^0の各連結成分は $H^\infty(\lambda)$ の peak set となることがわかる． これより $H^\infty(\lambda)$ は，X^0の各連結成分へ制限したものの直和にあらわせることがわかるので，X^0が連結の場合を考えれば十分である．

Step 2. $H^\infty(X^0)$ の generator を $H^\infty(\lambda)$ から探す： $U=X^0$ として，U は finitely connected な平面領域とする．U は有限個の analytic arc で囲まれているものとしてよい．$a, b \in U$ に対して，$F_{ab} \in H^\infty(U)$, $|F_{ab}| \leq 1$ で

$$F_{ab}(a) - F_{ab}(b) = \|a-b\|^{H^\infty(U)}$$

となるような函数が唯一つ存在して，extremal function といわれる．Gleason metric が等しいということ，及び $H^\infty(\lambda)$ が各点有界収束に関して閉じていることを合せれば，$F_{ab} \in H^\infty(\lambda)$ となる．

Step 3. $H^\infty(U)$ は extremal function から生成される：まず，F_{ab} は ∂U の近傍でも analytic となるように拡張され $|F_{ab}| = 1$ on ∂U, F'_{ab} は ∂U 上で 0 にならないということに注意する．また，b が a に十分近いとき $F'_{ab}(a) \neq 0$ となることもわかる．そこで，extremal function $F_1, \cdots, F_m$ を有限個取って，$F_1, \cdots, F_m$ は ∂U 上の有限個の点を除いては $\bar{U}$ の点を分離するように出来，しかも $\bar{U}$ 上で $F_1', \cdots, F_m'$ が同時に 0 にならないように出来る．$F_1, \cdots, F_m$ によって生成された uniform algebra を $B\ (\subset A(\bar{U}))$ とすると，Bishop の定理([1])から，$f \in A(\bar{U})$ の元で，$F_1, \cdots, F_m$ によって分離されない点上で一定値を取るものは，すべて $f \in B$ となる．$F_1, \cdots, F_m$ で分離されない点は，高々有限個であっ

て，それらはBに関するpeak setとなることに注意すれば，Bが$H^\infty(U)$で各点有界denseとなること，従って$H^\infty(\lambda)=H^\infty(U)$となることがわかる．（略証終）．

Step 1, Step 2の証明で使われた各点有界近似の定理など$H^\infty(\lambda)$に関する性質は，近年Gamelin，Garnett及びDavieによってきれいな形にまとめられたものである．これらのことに関しては，今回小林さんが講演されたので，それを参照されたい．

参考文献

1. Bishop, E., Subalgebras of functions on Riemann surface, Pac. J. Math. 8 (1958), 29-50.
2. Browder, A., Point derivations on function algebras, J. Funct. Anal. 1 (1967), 22-27.
3. Curtis, P. C., Peak point for algebras of analytic functions, J. Funct. Anal. 3 (1969), 35-47.
4. O'Farrel, A., An isolated bounded point derivation, Proc. Amer. Math. Soc. 39 (1973), 559-562.
5. Gamelin, T. W., and Garnett, J., Bounded approximation by rational functions, Pac. J. Math. 45 (1973), 129-150.
6. Hallstrom, A. P., On bounded point derivations and analytic capacity, J. Funct. Anal. 4 (1969), 153-165.
7. Hayashi, M., Point derivations on commutative Banach algebras and estimates of the A(X)-metric norm, (to appear).

8. Wang, J. L., An approximate Taylor's theorem for R(X), Aarhus Univ. Preprint Series 1972/73 No. 59.

9. Wilken, D. R., Bounded point derivations and representing measures on R(X), Proc. Amer. Math. Soc. (1970), 371-373.