数理解析研究所講究録
第207巻 1974年 1-10

存在域を定義する多様体のある族について

東大理　鈴木理

§1．問題の定式化とresolutionの概念。

Grauert[1]は1963年に次の様な多様体を発見した。(1) weakly 1-complete manifold（定義については本研究録Nakano[5]を見ること）でありglobalなholomorphic functionsは定数しか存在しない。(2) weakly 1-complete manifoldである analytic setを除くならholomorphically separableでありながらglobal holomorphic functionsの作るalgebraがStein algebraでないもの。この2つの多様体は従来のStein多様体の理論では説明が出来ない。さらに一般多様体上の函数論はStein多様体上のそれとは相当異なるものであると予想させる。多様体上の函数論とは何を対象としたらよいか？——という疑問が自然に生きる。

他方Grauert-Remmert[2]，Scheja[7]及びKerner[4]により$\mathbb{C}^n$ ($n\geq 2$)上の分岐Riemann domainが考察されたが

不分岐な場合に成立した基本的関係が一般には成立しないことが見いだされた。つまり

$$\text{存在域} \not\Longleftrightarrow \text{正則凸} \not\Longleftrightarrow \text{擬凸}.$$

(ここで $\underline{X}$ が存在域とは $\underline{X}$ の K-hull が $\underline{X}$ と同型になることとし，擬凸の定義は Grauert-Remmert [2] による Oka の円板族によるもので与える。)

分岐存在域の必要条件は何か？ 正則凸を真に含む充分条件は何であるか？

我々は この2つの問題が密接に関係すること，つまり才1の問題の半分は才2の問題に帰されることを見よう。この事柄を compact 多様体の "projective model" の方法を応用する。compact 多様体 Y では，$\mathcal{M}(Y) \cong \mathbb{C}$ となる事は常識的である。ここで $\mathcal{M}(Y)$ は Y 上の有理函数の作る体を現わす。射影的代数多様体からこの種の多様体を一括して取扱うのは次の定理に負う。$\mathcal{M}(Y)$ は超越元 $f_1 \cdots\cdots f_\ell$ に原始要素 $f_{\ell+1}$ を付加して得られる代数函数体であり，$\Phi = (f_1 \cdots\cdots f_{\ell+1}) : Y \longrightarrow \mathbb{P} \times \cdots\cdots \times \mathbb{P}$ $(\ell+1 \text{ケ})$ となる meromorphic map を得るが不定点を除いて holomorphic としてよい。$\Phi(Y) = \underline{Y}$ とすると $\mathcal{M}(Y) \cong \mathcal{M}(\underline{Y})$ が成立つ。$\mathcal{M}(Y) \cong \mathbb{C} \Longleftrightarrow \underline{Y} = \{8\}$ ということである。

これに対応する non-compact 多様体 X の結果は Grauert

[1]により与えられている。Xに次の同値関係を入れる。

$x, y \in X$に対して　$x \sim y \iff f(x) = f(y)$

for any holomorphic function on X.

この同値関係で割って得られる商空間には位相空間の構造が入り（但し一般に複素解析構造をもっているとは限らないことに注意する）これを$\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}(X)$とかく。ここで$\mathcal{O}(X)$はX上のglobal holomorphic functionsの作るalgebraの事とする。

$\varpi : X \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}(X)$により自然射影を定義する。

$$A = \{x \in X \mid \mathrm{rk}_x \varpi \neq \mathrm{rk}\,\varpi\}$$

とおくと解析的集合になる。我々は以下次の仮定をおく：

仮定($\mathbf{I}$)：(1) $\varpi^{-1}\varpi(x)$はconnected

(2) $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(X - A)$.

この仮定のもとでは$\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}(X)$で複素構造をもたぬ集合，以下これを$\Sigma$とかくことにすると，$\Sigma \subseteq \varpi(A)$となることが知られており，次の事柄が成立つ：

<u>Theorem</u>. $\underline{X} = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}(X) - \Sigma$とおく。$\dim \underline{X} = l$とすると，ある$\Phi : \underline{X} \longrightarrow \mathbb{C}^l$により分岐Riemann domainとして実現される。

こうして多様体上の函数論を“$\underline{X}$を存在域とする様な複素多様体Xを特徴づけること”という事にする。

従って問題は (1) 分岐領域$\underline{X}$の問題 と (2) fibre structure ϖ を特長づけることに帰される。我々はここでは(1)だけについて考える。(1)についてはあらかじめXが与えられている必要はなく，初めから分岐領域$\underline{X}$が与えられていると考えることもできる。Xが与えられている時には分岐領域は$\mathcal{I}$が出現することにより困難を生じている。ここで我々はresolution なる概念を導入しておく。

<u>Definition</u>. $\underline{X}$を$\mathbb{C}^n$上の分岐領域とする。X^*が$\underline{X}$のresolutionであるとは，(i) X^*が complex space. (ii) $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}(X^*) - \mathcal{I} \cong \underline{X}$ が成立つこととする。

Xがあらかじめ与えられている時には，

<u>Definition.</u> (X, τ, X^*)が resolution $\Longleftrightarrow$ (i) $\tau : X \longrightarrow X^*$が holomorphic map. (ii) $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(X^*)$. (iii) X^*が$\underline{X}_{\text{あ}} = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}(X) - \mathcal{I}$ の resolution.

いつ resolutionが存在するかは非常に困難な問題と思われる。我々は以下次の仮定をおこう。

仮 定 (**II**)： $\underline{X}$を分岐領域とした時 $\underline{X}$はresolutionをもつとする。(或はXが与えられている時には，Xがresolutionをもつとする。)

§2. 存在域を定義する多様体の或る族。

X が存在域となる為の充分条件を与える。これはStein多様体の最も自然な拡張になっている。resolution X^*に 次の条件をもつ non-effective divisor $[S^*]^n$ が存在すると仮定する。

<u>Definition</u>. X^*が$[S^*]^n$-representable $\Longleftrightarrow$ 任意の点pに対してある近傍$U(p)$が存在し，さらに $\Phi_p=(\varphi_0,\cdots\cdots\varphi_N)$，$\varphi_\sigma\in H^0(X^*, \mathcal{O}[S^*]^n)$ $\sigma=0,\cdots N$ と言う$U(p)$のembeddingが存在する。即ち，P^N内のある open set G_p 及び G_pの analytic set N_p が存在し $\Phi_p: U_p\cong N_p$ が成立つ。

<u>Definition</u>. X^*が$[S^*]^n$-separable $\Longleftrightarrow$ 任意の異なる2点 p, q に対して section $\varphi\in H^0(X^*, \mathcal{O}[S^*]^n)$ が存在して，$\varphi(p)\neq 0$，及び $\varphi(q)=0$ が成立つ。

<u>Definition</u>. X^*が$[S^*]^n$-convex except Γ $\Longleftrightarrow$ (i) Γは解析的集合である。(ii) $q_n\notin\Gamma$となる任意の発散点列$\{q_n\}$に対してΓの近傍Uをとり $\Omega=X^*-\overline{U}$ と置くとき $q_n\in\Omega$となるものを勝手に1つ取る。このΩについて次の事柄が成立つ：Kを任意のcompact setとした時，ある集合$\hat{K}$が存在して (α) $\hat{K}\cap\Omega$は relatively compact in X^*, (β)

任意の正数 ε, l 及び任意 $p \in X^* - \hat{K}$ 及びその勝手な近傍 $U(p)$ に対して、ある section $\varphi \in H^0(X^*, \mathcal{O}[S^*]^n)$ があって、

$$\|\varphi\|_K < \varepsilon \quad \text{及び} \quad \|\varphi\|_{q'} \geqq l \quad \text{ある点 } q' \in U(p)$$

が成立つ。ここで $\| \ \|$ はあらかじめ取られた $[S^*]^n$ の metric による長さとする。(この定義は metric の取り方によらぬ)。

こうして我々の族は次の様に定義される。

<u>Definition</u>. X^* が $\mathcal{S}$-manifold $\Longleftrightarrow$ ある $[S^*]^n$ が存在して (i) $[S^*]^n$-representable (ii) $[S^*]^n$-separable (iii) $[S^*]^n$-convex except some analytic set Σ.

次の定理が示される。

<u>Theorem I</u>. X^* が $\mathcal{S}$-manifold $\Rightarrow$ $\underline{X}$ は存在域である。

次に $\mathcal{S}$-manifold になるための充分条件を与える。

<u>Definition</u>. X^* が $\mathcal{L}$-manifold $\Longleftrightarrow$ $[S^*]^n$ が存在して (i) $[S^*]^n \otimes K_{X^*}^{-1} > 0$, ここで K_{X^*} は X^* の canonical line bundle とする。(ii) complete pseudoconvex function ψ が存在する。

<u>Theorem II</u>. X^* が $\mathcal{L}$-manifold $\Rightarrow$ X^* は $\mathcal{S}$-manifold.

これを示すのにNakano[5]及びKazama[3]による次の定理が基本的である:

<u>Theorem</u>: X^*が$\mathcal{L}$-manifoldとすると, $X_c^*=\{\psi<c\}$とおくと $H^q(X_c^*\ \mathcal{O}[S^*]^n\otimes\mathcal{L})=0$ ($q\geqq 1\quad n\geqq n_0$) 特に $H^q(X^*\ \mathcal{O}[S^*]^n)=0$ ($q\geqq 1$).

さらに次の事柄が示せる。

<u>Theorem (III)</u>. X^*が$\mathcal{L}$-manifoldの時には,

(i) $\Gamma=\phi \Rightarrow \mathcal{O}(X^*)$はStein algebraをもつ.

(ii) $\Gamma\neq\phi$, さらに$\Gamma=\{\beta\}$: 及び $\varpi^{-1}(\beta)=S^*$が成立つとする。この時, 次の条件を満たすdivisor Dが存在すると仮定する。(α) あるS^*のirreducible component S_j^*が存在して $S_j^*\cap D\neq\phi$ (但し $S_j^*\neq D$とする) (β) $D^{-1}\geqq 0$となるmetricをもつ。この時 $\mathcal{O}(X^*)$はStein algebraではない。

次に例を見よう。Otukiの例(本研究録 参照)を取扱う。記号はそこにあるものに従う。R, F, Gはそこにあげられているものとする。Fはtopologically trivial line bundleであるから, fibre-cordinateをζ_λとするとき, $\zeta_\lambda=f_{\lambda\mu}\zeta_\mu$として$F=\{f_{\lambda\mu}\}$とする時, $|f_{\lambda\mu}|\equiv 1$としてよい。従って$h=|\zeta_\lambda|^2$はF上のfunctionとなる。Gはnegative line bundleであるから, metric $\{a_\lambda\}$で $\partial\bar{\partial}\log a_\lambda>0$となるものがある。

これを1つ定める。Gのfibre cordinateをξ_λとする時$g=a_\lambda|\xi_\lambda|^2$は$G$上のfunctionとなる。$V=F\oplus G$とおく。$g$, hは自然射影によりV上の函数と見なせる。$\pi: V\longrightarrow R$とおき，$V_c=\{\varphi<c\}$，ここで$\varphi=g+h$とする。

<u>Proposition</u>．任意のcについて，$X_c=\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}(\cancel{X_c}\overset{V}{})-\mathcal{I}$とおくと，$V_c$は$\mathcal{L}$-manifoldになる。

Ôtuki [6] により$\mathcal{O}(V_c)$はStein algebraをもたないから$\mathcal{I}=\varpi(S)$が成立つ　ここで$S=\{\xi_\lambda=0\}$により定義されるdivisorである。(自然な同一視によりF, Gのfibre-cordinateとVのそれとを同一視している)。$[S]_R\cong G$であるから，$\pi^* a_\lambda=a_\lambda^*$とおき，$\tilde{a}_\lambda=a_\lambda^{*-1}\cdot e^{-\varphi}$とおくと$[S]^{-1}$のmetricを定め，これは任意の$V_c$についてpositiveになる。$V$のcanonical bundle K_VのmetricをV_cに制限してV_cのK_{V_c}のmetricとするなら，$[S]^{-n}\otimes K_{V_c}^{-1}>0$となる。尚$V_c$は決して正則凸でないことに注意する。

Grauertの与えた元の例(Ôtuki [6]をみよ)についてもFのzero sectionのtuber nbd F_cはやはり$\mathcal{L}$-manifoldになっている。この時には$[S]^{-l}\otimes[\bar{S}]^{-m}$を取ればよい。

<u>例 2</u>．$V=F\oplus G\oplus G$とおこう。同様にしてV_cを作るなら，V_cは$\mathcal{L}$-manifoldになっている。fibre-cordi

nate を $(\zeta_\lambda, \xi_\lambda, \eta_\lambda)$ とすると，次の事柄が Ôtuki とまったく同様にして示される。$A = \{\xi_\lambda = 0\} \cap \{\eta_\lambda = 0\}$ とおくと，

(i) 任意の $f \in \mathcal{O}(V_c)$ について $f|_A \equiv c$．さらに $\forall p, q \in V_c - A$，$p \neq q$ に対してある正則函数があり，$f(p) \neq f(q)$。

(ii) $\mathcal{O}(V_c)$ は non-Stein algebra である。従って $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}(V_c) - \varpi(A)$ は $\mathbb{C}^4$ 上の分岐 Riemann 領域として実現され，A は境界点を定める。所が $\mathrm{codim}\,A \geqq 2$ であるから，どの様に実現の仕方を変えても A は擬凸でない境界点になる。S^* としては $S = \{\xi_\lambda = 0\}$ も $S' = \{\eta_\lambda = 0\}$ のいずれもが取れることに注意しよう。

従って次の定理をうる：

<u>Theorem IV</u>：$\mathcal{L}$-manifold であって，(i) どの様に被覆しても擬凸でない境界をもつものがある。(ii) X^* で正則でないものがある。(iii) $\mathcal{O}(X^*)$ が Stein algebra でないものがある。

最後に問題をのべておく。

Problem 1. resolution は存在するだろうか？

§2 に於いては，$\mathcal{L}$-manifold $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$-manifold $\Rightarrow$ $\underline{X}$ が存在域が示された。そこで

Problem 2. $\underline{X}$ が存在域なら resolution として $\mathcal{L}$-manifold となるものがとれるだろうか？

これは不分岐存在域の場合の　存在域⇒擬凸に対応している事と見なせる。

Reference

[1]. Grauert; Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten. Math. Zeit 81 (1963) 377−391.

[2]. Grauert−Remmert: Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math Zeit 1957.

[3]. Kazama. Approximation theorem and its application to Nakano's vanishing theorem. Mem Fac Sci Kyushu Univ Vol 27 (1973) 221−240.

[4] Kerner. Holomorphiehüllen zu K-vollständigen Komplexen Räumen. Math Ann (138) (1959) 316−328.

[5] Nakano. weakly 1-complete manifold 上の消滅定理について.(本研究録)

[6] Ôtuki. Stein algebra をもたぬ多様体の例について.(本研究録)

[7] Scheja. Über das Auftreten von Holomorphie- und Meromorphiegebieten, die nicht holomorph-konvex sind. Math Ann 140 (1960) 33−50.