

多項式に帰着する整函数

京大 理 西 野 利 雄

I. x, y の整函数全体を $\text{class}(E)$ とする。
 $\text{class}(E)$ の函数 f , 其の prime surface の Riemann 面としての性質により次のように分類する。すなわち, すべての prime surface が ∞ 境界をもつような函数の全体を $\text{class}(P)$ とし, すべての prime surface が compact Riemann 面より有限個の点を除いたものに analytic equivalent であるような函数の全体を $\text{class}(A)$ とする。二のとき

$$\text{class}(A) \subsetneq \text{class}(P) \subsetneq \text{class}(E)$$

が成立する。

$f \in \text{class}(A)$ の函数とすると, f は (B) 型の irregular prime surface を持たず, かつ有限個の例外を除けば, 他のすべての f の prime surface は同一の genus と同一個数の境界点をもつ。[1].

とすると $P(x, y)$ を 2 変数の *polynome*, $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ を \mathbb{C}^2 の *analytic automorphisme*, $F(z)$ を 1 変数の *整函数* とすると, 函数

$$f(x, y) = F[P(\xi(x, y), \eta(x, y))]$$

は常に *class (A)* に属する. 逆に *class (A)* の函数 f が, 上のよゝに書けるとき, f は *polynome* に帰着すると云おう. 我々の目的は, *class (A)* の函数はすべて *polynome* に帰着する = とを示す = とである.

1971 年, 小平氏は \mathbb{C}^2 と *analytic equivalent* の部分を含む 2 次元の *compact complex manifold* M は, それの 1 次元 *betti* 数 b_1 が 0 である限り *rational* である = とを示した. [2]. $b_1 = 0$ という条件は, もし $T = M - D$ が *compact subvariety* ならば当然成立する. 二のよゝの場合, M は \mathbb{C}^2 の *compactification* と呼ぶ. 次いで 1972 年, Morrow 氏は \mathbb{C}^2 の *compactification* M に対して, ある種の極小条件を設定して, その場合の T の構造を明らかにした. [3]. 二れは \mathbb{C}^2 の *compactification* が常に *rational* になる = とを示しているばかりでなく, 更に M は *birationally* かつ D では *biregular* に \mathbb{P}^2 に対応する = とを示している. 二のとき T の *image* は, 当然 \mathbb{P}^2 の *complex line* である.

そこで次のような問題を提起する。

$f \in \text{class}(A)$ の函数とする。それに対し、ある \mathbb{C}^2 の compactification M と、 \mathbb{C}^2 より M への analytic homeomorphism ζ とを求め、 M での 1 個正則な函数 $f^* = f \cdot \zeta$ を考へると、 f^* の任意の定数面の各 irreducible component の M に於ける closure が M の compact subvariety になるようにあること。

二のようは M と M と ζ の組 (M, M, ζ) を f の algebraic model と呼ぼう。Morrow の結果より直ちにわかるように、もし $\text{class}(A)$ の任意の函数に対して、その algebraic model が作れるならば、我々の主問題は解決する。

2. V を 2 次元の analytic space とする。いま V からある Riemann 面 R への analytic map p が与えられて居り、 R の任意の点 α に対して、 $p^{-1}(\alpha)$ が 1 次元の analytic subvariety になつてゐると、組 (V, p, R) または誤解の生じない限り V を、 R 上の curve の holomorphic family または単に curve の family と呼ぶ。そして $p \in V$ から R への projection, $p^{-1}(\alpha)$ を V の α 上の fiber と云い、 $p^{-1}(\alpha) \in V_\alpha$ と書く。特に V の fiber V_α がすべて connected な compact analytic subvariety にな

るときを V の compact curve の family と云い, また V が Stein manifold のときは curve の Stein family または単に Stein family と云う. V が R 上の compact curve の family ならば, R に或る孤立点の集合 e があつて, e 以外の R の点 α に対して, V_α は non singular, irreducible, order 1 となる. 二のとき, 二の V_α の genus はすべて等しい. e の点 $\beta \in V$ の critical value, e の点 β に対して, $V_\beta \in V$ の critical fiber, e 以外の点 α に対して $V_\alpha \in V$ の general fiber, として V の general fiber の genus を V の genus と云う. V が Stein family のときは勿論二のように単純ではない. V を R 上の curve の family とする. δ は R 上の領域 δ と, δ から V への analytic map γ があつて, δ の任意の点 α に対して, $p(\gamma(\alpha)) = \alpha$ であるとき, $\gamma \in V$ の δ 上の analytic section と云う. また V と W を二つの curve の family とし, $\zeta \in V$ から W への map としとき, ζ によつて V の fiber を W の fiber に写像するときは, $\zeta \in$ fiber transformation と云う. 特に V と W が同じ Riemann 面 R 上の curve の family で W は compact curve の family, ζ は into homeomorphism, ζ の R の任意の点 α に対し, $V_\alpha \in W_\alpha$ に写像するとき, W を V の fiber compactification と云う. 二のときは V と $\zeta(V) \in$

identify して $V \subset W$ とみなす. また V を R 上の curve の family, R' を 1 つの Riemann 面, ξ を R' から R への analytic map とする. このとき R' 上の curve の family V' で, それが V の自然な逆像になっているものが作れる. これを V の ξ による pull-back と云う. ξ による V' より V への fiber transformation を同じ ξ で表わす.

一般に M を 2 次元の analytic space, S を M の 1 次元の analytic subvariety とする. もし S が abstract Riemann 面として compact Riemann 面 \hat{S} から有限個の点を除いたものであるとき, S を algebraic と云う. そして $\hat{S} - S$ の点を S の境界点と云い, \hat{S} の genus が g , S の境界点の個数が n のとき, S は type (g, n) である と云う. また S を V の algebraic subvariety とし, φ を S の近傍で meromorphic な函数とすると, φ の S への restriction が, \hat{S} で高々 meromorphic になるとき φ は S 上 algebraic である と云う.

さて, (V, ρ, R) を 1 つの Stein family とし, 次の条件を満す とする.

条件 (A). R の任意の点 α に対し, V の α 上の fiber V_α は, irreducible, algebraic で, 同一の type (g, n) を持つ.

このとき V は type (g, n) である といふ. V の任意の fiber は non singular, irreducible, order 1 になる.

しかも R の任意の真 d_0 に対し d_0 の適当な近傍 δ をとれば,
 $p^{-1}(d)$ で meromorphic で, $d \in \delta$ の任意の真 d に対して V_d
 上 non constant, algebraic な函数を作る事ができる。
 この事より我々は次の定理を得る。

Theorem I. V を R 上の curve の Stein family とす
 る。もし V が条件 (A) を満たせば, V の fiber compactifi-
 cation \hat{V} が存在する。

なおこのとき, Hartogs の定理より, $T = \hat{V} - V$ は \hat{V} の
 analytic subvariety になる。したがって T は \hat{V} の R 上の
 多価な analytic section γ を与える。

3. $f(x, y)$ を class (A) の函数で primitive とする。
 f によって \mathbb{C}^2 (若 \mathbb{C}') 上の curve の Stein family とみられる。
 しかも \mathbb{C}^2 から f の critical surface を除いた部分は
 Stein family として条件 (A) を満たす。そこで f の
 algebraic model を作るためには次の二つの問題を解けばよ
 い。

\mathcal{D} を \mathbb{Z} 平面の円 $|z| < \rho$ とし, $\mathcal{D}' = \mathcal{D} - \{0\}$ とする。

" (V', ρ, \mathcal{D}') を curve の Stein family とし, 条件 (A)
 を満たすとする。このとき, \mathcal{D} 上の compact curve の fami-
 ly \tilde{V} で, $\tilde{V} - V_0'$ は V' の fiber compactification である

り、かつ $\tilde{V} - V'$ は \tilde{V} の analytic subvariety になるものを探めること。”

“(V, p, D) を curve の Stein family とし、 $V' = V - V_0$ は条件 (A) を満たし、かつ V_0 は有限個の irreducible component よりなるとする。このとき V の fiber compactification \tilde{V} で、 $\tilde{V} - V$ が \tilde{V} の analytic subvariety になるものを探めること。”

この次の問題で、 V_0 が有限個の irreducible component よりなると言う条件は不可欠である。同様の理由で、たとえ V' が type (0, 1) であっても、整函数のときのように、 V_0 が irreducible になるとは限らない。

この節では、 V' の type を (0, n) とし、この2つの問題を解く。

1) (V', p, D') を条件 (A) を満たす type (0, n) の Stein family とする。定理 I より V' の fiber compactification \tilde{V}' が存在する。 $S = \tilde{V}' - V'$ とする。 S の connected component を S_j ; ($j = 1 \dots p$)、 S_j の D' 上の枚数を m_j 、 m_j ($j = 1 \dots p$) の最小公倍数を m とし、 t 平面上の円 E :

$|t| < p^{-1/m}$ より D 上への analytic map $\xi: z = t^m$ を考える。このとき、 $E' = E - \{0\}$ とし、 E' 上に ξ による \tilde{V}' の pull-back \tilde{W}' が得られる。このとき S の ξ による逆像 T

は、 E' 上單葉な n 個の *connected component* T_ν ($\nu=1 \cdots n$) に分かれる。そこで \tilde{W}' 上で T_1 でのみ 1 位の pole をもつ 1 価 meromorphic な函数 $\tilde{\varphi}$ を作る。二のよう な函数は確かに存在する。そして写像 $w = \tilde{\varphi}$ によつて、 \tilde{W}' を $E' \times P'$ と実現できる。二のとき T_ν ($\nu=2 \cdots n$) は $w = \zeta_\nu(t)$ と表わせるが、もし存在するならば、 $\zeta_2 \equiv 0$, $\zeta_3 \equiv 1$ としておく。そうすると Picard の定理より $\zeta_\nu(t)$ ($\nu=4 \cdots n$) は、存在する限り、 $t=0$ で高々 pole である。

さて、もし $m=1$ ならば、 $\tilde{W}' = \tilde{V}'$ であるから、 $E \times P'$ が確かに求める \tilde{V} である。これを $m \geq 2$ とする。 \tilde{W}' を \tilde{V}' によつて \tilde{V}' 上の covering とみれば、 \tilde{W}' の covering transformation を ζ_μ ($\mu=1 \cdots m-1$) とする。 ζ_μ は $t' = e^{2\pi i \mu/m} t$, $w' = \psi_\mu(wt)$ と表わされる。二のとき明らかに T は ζ_μ によつて invariant である。したがつてもし $n \geq 3$ ならば ζ_μ は $E \times P'$ で高々 meromorphic である。また $n=2$ ならば $\zeta_1 = e^{\alpha(t)}/w$ と書ける。二で $\alpha(t)$ は E' で 1 価正則である。二のときは座標変換 $w' = e^{-\frac{1}{2}\alpha(t)}/w$ とおくと $\psi_1 = 1/w'$ となるから、やはり $E \times P'$ で高々 meromorphic とできる。そこで $\varphi = w + \sum \psi_\mu$ とする。 φ は \tilde{V}' 上の 1 価函数になる。そして写像 $u = \varphi$ で \tilde{V}' は $D' \times P'$ 上の多様域として実現される。二は容易に $D \times P'$ 上相対境界のない多様域に拡張できる。二は

が求める \tilde{V} である. したがって $\text{type}(0, n)$ のとき \mathcal{O}_1 問題は確かに解ける.

2) 次に (V, p, \mathcal{D}) を \mathcal{O}_2 問題の条件を満たす $\text{type}(0, n)$ の Stein family とする. この問題は, 必要なら十分小さい円 \mathcal{D}^* : $|z| < \rho^*$ ($\rho^* < \rho$) を考え, $p^{-1}(\mathcal{D}^*)$ で解きさす方がよい. また V より, V の \mathcal{D} 上の analytic section の像で共通点を持たぬものを有限個除き去ったものを V^* とするとき, V^* に対する \mathcal{O}_2 問題の解は, また V に対する \mathcal{O}_2 問題の解にもなっている. それで $n \geq 3$ と仮定しても一般性を失はれない. さて $V' = V - V_0$ とし, V' に対する \mathcal{O}_1 問題の解を \tilde{V} とする. として V' の \tilde{V} への canonical な写像を φ とする. このとき \mathcal{D} 内の $z=0$ の任意の近傍 δ と, V の δ 上の任意の analytic section η に対し, \tilde{V} の $\delta - \{0\}$ 上の analytic section $\eta^* = \varphi - \eta$ が定義されるが, 上の仮定より η^* は \tilde{V} の δ 上の analytic section に解析接続される. したがって写像 φ は V から \tilde{V} への bimeromorphic な写像に拡張される. そうすれば \tilde{V} を変形して φ が biregular になるようにできる. したがって求める \hat{V} である. したがって $\text{type}(0, n)$ のとき, \mathcal{O}_2 問題も確かに解ける.

4. この節では, 前節で提起された二つの問題を $g=1$ の

ときに解決する。よく知られているように, genus 1 の compact curve の family, すなわち elliptic family については, 小平氏の詳細な研究がある [4]。ここでは, その理論を次のように応用する。 (V', p, \mathcal{D}') を条件 (A) を満たす type $(1, n)$ の Stein family とし, $\tilde{V}' \in V'$ の fiber compactification とする。 \mathcal{D}' の実 \mathbb{Z} に対し, \tilde{V}'_2 の基本 cycle C_2, D_2 を \mathbb{Z} に関して連続的に動くように取り, \tilde{V}'_2 の第一種微分 w_2 を \mathbb{Z} に関して analytic に動くように作る。そうすると w_2 の C_2 および D_2 に関する period の比により, \mathcal{D}' より上半平面 \mathcal{H} への analytic map $\pi(\mathbb{Z})$ が得られる。 $\pi(\mathbb{Z})$ は一般に \mathcal{D}' 上の多価函数になり, \mathbb{Z} が原実の周りを一周すると, \mathcal{H} の modular 変換群 Δ の element Γ による変換を受ける。しに Γ が \mathcal{H} に射ける elliptic modular function を $J(u)$ とし, $\tilde{\pi}(\mathbb{Z}) = J(\pi(\mathbb{Z}))$ とすると, $\tilde{\pi}(\mathbb{Z})$ は \mathcal{D}' 上の正則になるが, これは $\mathbb{Z} = 0$ で高々 meromorphic である。この $\tilde{\pi}(\mathbb{Z})$ を \tilde{V}' の characteristic, Γ を \tilde{V}' の monodromy と云う。

$\mathcal{S} = \mathbb{Z} \cdot S = \tilde{V}' - V'$ とし, S の connected component を $S^{(j)}$ ($j = 1 \dots p$) とし, $S^{(j)}$ の \mathcal{D}' 上の枚数を m とする。 \mathcal{S} として \mathbb{C} 平面上の円 $E: |t| < \rho^{1/m}$ より \mathcal{D}' への写像 $\xi: z = t^m$ による \tilde{V}' の pull-back を \tilde{W}' , S の ξ による逆像を T , T の connected

component を $T^{(\nu)}$ ($\nu=1 \dots \delta$) とし, その $\mathbb{P}^1 S^{(1)}$ に対応するものを $T^{(1)}$ とする. $T^{(1)}$ は E' 上單葉である. $t=0$ で \tilde{W}' の characteristic は $\pi^*(t) = \pi(t^m)$, \tilde{W}' の monodromy は $\Gamma^* = \Gamma^m$ である. $t=0$ での $\pi^*(t)$ と Γ^* とで E 上の elliptic family \tilde{W} を作る. $t=0$ のとき \tilde{W} は, $T^{(1)}$ の \tilde{W} の E 上の analytic section を与えるように \tilde{W} を含んでおくとよい. そうすると Picard の定理より容易にわかるように, $T^{(\nu)}$ ($\nu=2 \dots \delta$) の \tilde{W} に於ける closure は, すべて \tilde{W} の analytic subvariety になる. $t=0$ で \mathbb{D} の analytic automorphism $\gamma_\mu: t' = e^{2\pi i \mu/m} \cdot t$ ($\mu=0, 1, \dots, m-1$) を考へると $\pi^*(\gamma_\mu(t)) = \pi^*(t)$ となる. $t=0$ かつ γ_μ は \tilde{W} の analytic automorphism $\tilde{\gamma}_\mu$ を引き起す.

$t=0$ で \tilde{W} を, $t=0$ の $\tilde{\gamma}_\mu$ ($\mu=0, 1, \dots, m-1$) の作る群で割ったものを \tilde{V} とすると, $t=0$ の求める compact curve の family である. よって $g=1$ のとき, \mathcal{P}_1 問題は確かに解ける.

\mathcal{P}_1 問題が解けるならば, \mathcal{P}_2 問題は type $(0, n)$ のときとほとんど同様の方法で解決される. 次の事も注意されたい. すなわち,

\tilde{V} を \mathbb{D} 上の elliptic family とし, \tilde{V} の critical fiber は \tilde{V}_0 のみとする. $t=0$ を \mathbb{D} 上の analytic section とする. いま領域 $\delta: 0 < |z| < \rho'$ ($\rho' < \rho$) 上の \tilde{V} の analytic

section γ が与えられたとき, もし δ の各点に対して, δ を γ とするならば, γ は $z=0$ でも analytic section に拡張できる.

二つ二つは; Picard の定理と小平氏の elliptic family の作り方より容易に証明できる.

5. 最後に $g \geq 2$ のときを考察する. 一般に z 平面上の円 $D: |z| < \rho$ に対し, D 上の genus g ($g \geq 2$) の compact curve の family \tilde{V} を考へる. いま \tilde{V} の critical fiber が \tilde{V}_0 のとき, \tilde{V} を D 上の degenerating family と云う. degenerating family について, 最近いくつかの研究がある. (例として [5] を参照). ここでこれらの理論を応用する. H_g を Siegel の上半平面, Δ_g を H_g の symplectic group, $\tilde{V}_g = H_g / \Delta_g$, として \tilde{V}_g を \tilde{V}_g の佐武氏の意味の compactification とする. 与うすると genus g の curve の moduli space M_g は, \tilde{V}_g の中の local closed analytic set である. 与して \hat{M}_g を M_g の \tilde{V}_g における closure とすると, \hat{M}_g は \hat{M}_g も共に projective algebraic である. 与して $\tilde{V}' = \tilde{V} - \tilde{V}_0$ とし, $g=1$ のときと同様に, D' の任意の点 z に対し \tilde{V}'_z の基本 cycle (C_z, D_z) と (C_z, D_z) に対して normalize した第一種微分の base を使って, D' より H_g への analytic map

$\pi(Z)$ と, Z が原点の周りを一周したとき $\pi(Z)$ が受ける変換 Γ ($\Gamma < \Delta g$) を定める. 二の $\pi(Z)$ および Γ をまた \tilde{V} の characteristic および \tilde{V} の monodromy と呼ぶ. 二のとき, H_g より \tilde{H}_g への canonical projection を J とし, $\tilde{\pi}(Z) = J(\pi(Z))$ とすると, $\tilde{\pi}(Z)$ は \tilde{D}' より \tilde{H}_g への 1 個の analytic map になるが, 二を \tilde{H}_g への analytic map とするならば, $Z=0$ でも analytic に接続される. [6].

二で次のような概念を導入する [7]. 一般に R をある Riemann 面, \tilde{W} を R 上の compact curve の family とする. いま \tilde{W} が次の条件を満たすならば, \tilde{W} を stable curve の family と云う.

i) \tilde{W} の各 fiber \tilde{W}_α は高々 double ordinary かつ singular point しか持たず, かつ \tilde{W}_α の各 irreducible component は order 1 である.

ii) \tilde{W}_α の irreducible component で non singular rational なものは, 少なくとも 3 点で他の component と交わる.

二のとき, 次の二を云える.

$\tilde{V} \in \mathcal{D}$ 上の degenerating family とする. \tilde{V}_0 の irreducible component を $\tilde{V}_0^{(j)}$ ($j=1, \dots, p$), $\tilde{V}_0^{(j)}$ の order を m_j , m_j ($j=1, \dots, p$) の最小公倍数を M とし, τ 平面上の円 E :

$|t| < \rho^{1/m}$ より $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ の analytic map $\xi: Z = t^m$ による \tilde{V} の pull-back を \tilde{V}^* とする. 二のとき E 上の stable curve の family \tilde{W} で, \tilde{V}^* と bimeromorphic equivalent なものが存在する.

さて, 上のような条件を満たす curve C を stable curve と呼ぶ. $\dim H^1(C, \mathcal{O})$ を C の genus とすると, genus g の stable curve 全体の moduli 空間 $\tilde{\mathcal{M}}$ が定義でき, これも projective algebraic になる. $\tilde{\mathcal{M}}$ は自然に \mathcal{M} を含むから, $\hat{\mathcal{M}}$ と $\tilde{\mathcal{M}}$ は birational equivalent である. ところが $\tilde{\mathcal{M}}$ のある有限葉の covering \mathcal{M} をとり, \mathcal{M} より $\tilde{\mathcal{M}}$ への canonical projection π をとると, \mathcal{M} 上の stable curve の holomorphic family \mathcal{F} で \mathcal{M} の任意の点 α に対し, \mathcal{F} の α 上の fiber の moduli が $\mathcal{M}(\alpha)$ になるようなものが存在する. [8].

よってあらためて (V', ρ, \mathbb{D}') を条件 (A) を満たす type (g, n) ($g \geq 2$) の Stein family とし, \tilde{V}' を V' の fiber compactification とする. よして degenerating family のときと同様にして, \tilde{V}' の characteristic $\pi(Z)$ と \tilde{V}' の monodromy Γ を定める. よして $\hat{\pi}(Z) = J(\pi(Z))$ とすると, これは \mathbb{D}' より $\tilde{\mathcal{M}}$ への analytic map と考えられるが, これもまた $Z=0$ でも analytic に拡張できる. したがって上の二のときより, 正の整数 m を適当にとり, t 平面上の円 $E: |t| < \rho^{1/m}$

より \mathbb{D} への analytic map $\tilde{\gamma} : Z = t^m$ を考えるとき, E 上の stable curve の family \tilde{W} で E の任意の点 t に対し, \tilde{W}_t の moduli が $\tilde{\pi}(\tilde{\gamma}(t))$ と取るものが存在する.

こゝに次の定理がある.

Theorem 2. \mathbb{D} を Z 平面上の円 $|Z| < \rho$, \tilde{W} を \mathbb{D} 上の stable curve の family で, critical fiber は \tilde{W}_0 のみとする. このとき領域 $\delta : 0 < |Z| < \rho'$ ($\rho' < \rho$) 上の \tilde{W} の analytic section は, $Z = 0$ でも analytic な section に拡張できる.

もしこの定理の証明ができたならば, 前節の問題は $g = 1$ のときと全く同様に $g \geq 2$ のときも解決する.

6. この節では前節の定理の概要を述べる. 再びためて \mathbb{D} を Z 平面上の単位円 $|Z| < 1$ とし, V を \mathbb{D} 上の stable curve の family, $\eta(Z)$ を領域 $\delta : 0 < |Z| < \rho$ 上の V の analytic section とする. \mathbb{D} の点 Z 上の V の fiber を S_Z とし, V の critical fiber S_0 の irreducible component を $S_0^{(j)}$ ($j = 1, \dots, p$), $S_0^{(j)}$ の S_0 の singular point をすべて除いたものを $s_0^{(j)}$ とする. 仮定より $s_0^{(j)}$ の universal covering space $\tilde{s}_0^{(j)}$ はすべて hyperbolic である. さて, もし $\eta(Z)$ が $Z = 0$ へ analytic に拡張されないならば, その image はどれかの $s_0^{(j)}$ 全体に集積する. それでいま δ 内に

原点上に収斂する点 a_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) で, $\eta(a_\nu)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) は S_0 の regular point P に収斂するものがあると仮定する. 二のとき $\eta(z)$ は $z \rightarrow 0$ のとき P に収斂する二を示そう. そのためには, 円 $|z| = |a_\nu|$ を γ_ν とするとき, 必要なら部分列を選んで, γ_ν の $\eta(z)$ による image が ν と共に P に収斂する二を示せばよい. [9].

a). P は $s_0^{(1)}$ にあるとする. P における V の局所座標を z と v になるようにとり, その座標近傍の中に dicylinder $\Delta = (\Delta^1, \Delta^2) : |z| < \rho^1, |v| < \rho^2$ を描く. 与して Δ^1 の点 z に対し, $\alpha_z = S_z \cap \Delta$ とし, α_z における S_z の局所座標を v とする. Δ 内で $v=0$ で与えられる直線を L とし, $L_z = L \cap S_z$ とする. 次に δ 内には原点上に収斂する任意の点 z_μ ($\mu = 1, 2, \dots$) をとり, S_{z_μ} の universal covering space を \tilde{S}_{z_μ} , \tilde{S}_{z_μ} の δ_{z_μ} 上の部分の connected component の一つを $\tilde{\delta}_{z_\mu}$, $\tilde{\delta}_{z_\mu}$ での \tilde{S}_{z_μ} の局所座標をまた v とし, $\tilde{\delta}_{z_\mu}$ の $v=0$ なる点を \tilde{L}_{z_μ} とする. 二で, \tilde{S}_{z_μ} を w 平面上の原点を中心とする円に等角写像する函数 φ_μ を作る. この函数は二つの条件

$$\varphi_\nu(\tilde{\sigma}_{z_\mu}) = 0, \quad d\varphi_\nu(\tilde{\sigma}_{z_\mu})/dv = 1$$

で一意的に定まる. 二の半径を r_μ とする. 二のとき, ある正の数 r_0 があって,

$$\lim r_\mu = r_0$$

となる. 二の r_0 は $\tilde{r}_0^{(1)}$ を同様の仕方で W 平面に等角写像したときの円の半径である.

b). 次に H を t 平面の領域 $\operatorname{Re}(t) < 0$, ξ を H から \mathcal{D}' への analytic map $z = e^t$, ξ による V の pull-back を W とする. W の t 上の fiber を T_t と書く. ξ による Δ および L の逆像をそれぞれ Δ^* および L^* と書く. Δ^* は $H \times \Delta^2$ と equivalent であるから, W の Δ^* における局所座標を u と v とする. $t = 0$ で W は topological fiber space として trivial である. したがって W の universal covering space を \tilde{W} とすると, \tilde{W} の t 上の fiber は T_t の universal covering space \tilde{T}_t となる. \tilde{W} の $\tilde{\Delta}^*$ の上にある部分の connected component の 1 つを $\tilde{\Delta}^*$ とし, \tilde{W} の \tilde{L}^* の上にある直線の全体を l_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), その内 $\tilde{\Delta}^*$ 内にあるものを l_0 とする. 二のとき Teichmüller space の理論より, \tilde{W} 上の正則函数型で, 写像 $W = \tilde{\Psi}$ により, H の点 t に対して \tilde{T}_t を W 平面の単葉な領域に写すものが存在する. しかも二の像領域は $W = 0$ および $W = 1$ を含まない. [10]. そこで $\alpha(t) = \tilde{\Psi}(l_0)$, $\beta(t) = \partial \tilde{\Psi}(l_0) / \partial v$ とし

$$\tilde{\Psi}^* = (\tilde{\Psi} - \alpha(t)) / \beta(t)$$

とおく.

c) α_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) の ξ による逆像の内, 領域: $-\pi <$

$I_m(t) \subseteq \pi$ に含まれるものを d_ν とし, $d_\nu = -\operatorname{Re}(d_\nu)$ とする. よして Γ_ν を円: $|t - d_\nu| < \sqrt{d_\nu}$, \tilde{W}_ν を \tilde{W} の Γ_ν 上の部分とし, 写像 $\Phi_\nu^{(1)}$

$$\tau = (t - d_\nu) / \sqrt{d_\nu}, \quad w = \bar{z}^*$$

による \tilde{W}_ν の image を G_ν とする. τ 平面の単位円 $|\tau| < 1$ ともよく書くと, G_ν は \mathbb{C}^1 の単葉な部分領域である. しかも Koebe の定理よりある正の数 k_0 が存在して, 円 $|w| < k_0$ を I^* と書くと, G_ν はすべて dicylinder $I \times I^*$ を含む. 他方 $L_i \cap \tilde{W}_\nu$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) の Φ_ν による image $L_{i\nu}^*$ はすべて $w = f_{i\nu}(\tau)$ ($f_{i\nu}(\tau)$ は \mathbb{C}^1 で 1 価正則) と書け, しかも $I \times \mathbb{C}^1$ 内の G_ν の境界は $L_{i\nu}^*$ 全体の導集合になっている. したがってそれは $w = F_{i\nu}(t)$ ($L \in I$, $F_{i\nu}(t)$ は \mathbb{C}^1 で 1 価正則の函数) なる型の解析面で構成されている. また領域の列 G_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) は, 必要ならば部分列をとって, ある領域 G_0 に収斂する. G_0 は \mathbb{C}^1 をある w 平面の領域 J_0 との直積 $I \times J_0$ であり, J_0 は \mathbb{C}^1 の image である. したがってそれは全平面ではない. 写像 $\Phi_\nu^{(1)}$ による $\tilde{\Delta}^* \cap \tilde{W}_\nu$ の像を β_ν とし, また $\beta_\nu = (d_\nu - d_\nu) / \sqrt{d_\nu}$ としておく.

4) 各 G_ν に対し, $I \times \mathbb{C}^1$ 内の G_ν の境界に含まれる 2 つの解析面を与える函数 $F_{1\nu}(t)$ および $F_{2\nu}(t)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) を適当に選び, 必要ならば再び部分列をとって, その 2 つの函数列

がそれぞれ異なる定数 F_{10} および F_{20} に収斂するようにする。
 つぎに入 (w) を単位円内の elliptic modular function の導函数
 とし、函数

$$\Delta(\tau, w) = \lambda((w - F_{1v}(t)) / (F_{2v}(t) - F_{1v}(t)))$$

を考へる。そして写像 $\alpha_\nu^{(2)}$: $\tau' = \tau, w' = s_\nu(\tau, w)$ による G_ν
 の image を G_ν^* とする。 G_ν^* はすべて単位 dicylinder
 $L' \times L''$: $|\tau'| < 1, |w'| < 1$ 内の単葉な領域である。この
 とき、函数 s_ν の branch を適当に選んで、領域の列 G_ν^*
 ($\nu = 1, 2, \dots$) は $L' \times L''$ の内部の領域 G_0^* に収斂するよう
 にしておく。そうすると $\alpha_\nu^{(2)}$ による image G_ν^* の列も
 またある領域 G_0^* に収斂する。このとき G_0^* も G_0^* も直積領
 域である。これを $L' \times J_0^*$, および $L' \times T_0^*$ と書く。

e) 以上で準備はできた。二で δ 上に最初に与えた V
 の analytic section $\gamma(z)$ より自然に定義される G_ν^* の L'
 上の analytic section を考へる。

先ず ν が十分大きければ、 $\alpha_\nu(P_\nu)$ は δ に含まれるから、あ
 べての ν に対して $\alpha_\nu(P_\nu) \subset \delta$ と仮定しておく。また $\gamma(a_\nu)$
 は P に収斂するから、同様にすべての ν に対して $\gamma(a_\nu) \in \Delta$
 と仮定しておく。そうすると $\gamma(z)$ の定義する L' 上の G_ν^* の
 analytic section であつて、 β_ν の image が G_ν^* に入るも
 のが一意的に定まる。これを $\alpha_\nu^*(\tau')$ とすると、これは L' に

ける 1 個正則な函数である。そして値の列 $f_\nu^*(\rho_\nu)$ ($\nu=1, 2, \dots$)
 は D_0^* の真に収斂する。ところで円 $\Gamma_\nu: z = |a_\nu| e^{i\theta}$, ($-\pi < \theta < 2\pi$)
 に対して D' 内で線分 $\gamma_\nu^*: \operatorname{Re}(z') = 0$, $-\pi/\sqrt{a_\nu} < \operatorname{Im}(z') \leq \pi/\sqrt{a_\nu}$
 を考へる。この線分の長さは 0 に *tend* する。とう
 有ると Schwarz の定理より f_ν^* による γ_ν^* の *image* の長さも
 また 0 に *tend* する。このことは γ_ν の γ による *image* が P
 に *tend* することを示してゐる。よつてこの定理は証明でき
 た。

以上により、我々は次の定理を得た。

Theorem Class (A) の函数はすべて多項式に帰着する。

以上

参 考 文 献

- (1) T.Nishino; Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. (IV) Types de surfaces premières. J. Math. Kyoto Univ. 13(2), (1973) 217-272.
- (2) K.Kodaira; Holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds. Diff. Geo. (1971) 33-46.

- (3) J.A.Morrow; Compactification of \mathbb{C}^2 . Bull. Amer. Math. Soc. 78(5), (1972) 813-816.
- (4) K.Kodaira; On compact analytic surfaces II. Ann. of Math. 77(3), (1963) 563-626.
- (5) P.A.Griffiths; Seminar on degeneration of algebraic varieties. Inst. for Advanced Study, Princeton. 1967-1970.
- (6) S.Kobayashi and T.Ochiai; Stable compactification and the great Picard theorem. J. Math. Soc. Japan 23(2), (1971) 340-350.
- (7) P.Deling and D.Munford; The irreducibility of the space of curves of given genus. I.H.E.S. No.36, Paris (1969) 75-110.
- (8) ?
- (9) H.Grauert and H.Reckziegel; Hermitesche Metriken und normale Familien holomorpher Abbildungen. Math. Z. 89, (1965) 108-125.
- (10) L.V.Ahlfors; Lectures on quasiconformal mappings. (1966) Van Nostrand.