

Non Stein Algebraの例について

東大理 大槻真

§0. Introduction

Grauert [1] は次のような complex manifold X の例を与えた:

- (I) X は擬凸多様体である (即ち X 上には complete pseudoconvex fun. が存在する),
- (II) X 上の holomorphic fun. の成す環 $\Gamma(X, \mathcal{O})$ は Stein algebra ではない (即ち $\text{Spec } \Gamma(X, \mathcal{O})$ が Stein space ではない)。

彼の例は複雑で、(II)の性質の由来する仕組みがわかりにくい。ここでは §1 で上記の2性質をもつより簡単な例を与え、 §2 では両者が共に Stein space と関連づけられることを示し、更に当面の問題を挙げようと思う。

§1. Non Stein Algebra の例.

次のものを考えよ:

R : compact Riemann surface of genus ≥ 1 ,

F : R 上の infinite order の topologically trivial line bundle ($\mathbb{R}P^1 \subset F^n \neq 1$ for $\forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$),

G : R 上の negative line bundle,

$V = F \oplus G$ (Whitney sum).

以上, F, G, V は各 bundle の total space を表わすものとする。このとき, F, G 上には夫々 complete p -convex fam. が存在し (Grauert [1], [2]), V 上には complete p -convex fam. φ で, V 上では $\varphi \geq 0$, R 上ではのみ $\varphi = 0$ と取りうるものがある (ここで R は total space V の中の zero section とみられている)。

$\forall c > 0$ に対して, $V_c = \{p \in V \mid \varphi(p) < c\}$ とおくと, $\Gamma(V_c, \mathcal{O})$ は Stein algebra となる。

以下のその証明は, Grauert [1] のそれにはほぼ同じものである。

R の covering $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}$ について, F, G の fibre coordinate を夫々 $\xi_\lambda, \zeta_\lambda$ とし, $S = \{\sum \xi_\lambda = 0\} \subset V$ とおく。

$f \in \Gamma(V_c - S, \mathcal{O})$ を $\xi_\lambda, \zeta_\lambda$ に関する Hartogs 級数に展開して,

$$f = \sum_{m, n} f_\lambda^{(m, n)} \xi_\lambda^m \zeta_\lambda^n, \quad p \in U_\lambda,$$

とすると,

$$f^{(m, n)} = \{f_\lambda^{(m, n)}\}_\lambda \in \Gamma(R, \mathcal{O}(F^{-m} \otimes G^{-n}))$$

が成り立つ。これから次のことが容易にわかる:

① $m < 0$ のとき,

$$f^{(m,n)} = 0 \quad \text{for } \forall m,$$

② $m = 0$ のとき,

$$f^{(0,0)} = \text{constant}$$

$$f^{(m,0)} = 0 \quad \text{if } m \neq 0,$$

③ $\exists m > 0$ に對して

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(R, \mathcal{O}(F^{\otimes m} \otimes G^{-n})) > 0 \quad \text{for } \forall m.$$

故に

Proposition 1.

(1) $\Gamma(V_c, \mathcal{O}) \cong \Gamma(V_c - S, \mathcal{O}),$

(2) $\forall f \in \Gamma(V_c, \mathcal{O})$ に對して, $f|_S \equiv \text{constant}.$

今, \mathcal{I} を S の ideal の sheaf とすると, Prop. 1, (2) より,

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(V_c, \mathcal{O}) / \Gamma(V_c, \mathcal{I}) = 1.$$

また ③ をみたす m に對しては

$$\textcircled{3}' \quad \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(V_c, \mathcal{I}^m) / \Gamma(V_c, \mathcal{I}^{m+1}) = \infty,$$

が成り立つ。そこでこのような m の最小値を m_0 とする ($m_0 \geq 1$)。

Proposition 2.

$\Gamma(V_c, \mathcal{O})$ の ideal $\Gamma(V_c, \mathcal{I})$ は有限生成ではない。

(証明) f_1, \dots, f_l が $\Gamma(V_c, \mathcal{I})$ を生成すると仮定する。

$h: \Gamma(V_c, \mathcal{O})^{\otimes \ell} \rightarrow \Gamma(V_c, \mathcal{M})$ は ℓ homomorphism と
 $h: (g_1, \dots, g_\ell) \mapsto \sum_{i=1}^{\ell} f_i g_i$ と定めると, h は surjective.
 h を $\text{mod } \Gamma(V_c, \mathcal{M}^{m+1})$ で考えれば, h は homomorphism
 $\underline{h}: [\Gamma(V_c, \mathcal{O}) / \Gamma(V_c, \mathcal{M}^m)]^{\otimes \ell} \rightarrow \Gamma(V_c, \mathcal{M}) / \Gamma(V_c, \mathcal{M}^{m+1})$
 h を induce する。従って $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(V_c, \mathcal{M}) / \Gamma(V_c, \mathcal{M}^{m+1}) < \infty$
 であるが, h は ③' に反する。 (証明)

とすると, $\forall p \in S$ に対して character $f \mapsto f(p)$ の
 kernel は $\Gamma(V_c, \mathcal{M})$ であり, 即ち $\Gamma(V_c, \mathcal{M})$ は $\Gamma(\mathcal{O}_{V_c})$
 の character ideal であり, Grauert [1] の §2, Satz 3.12
 より, Stein algebra の character ideal は有限生成で
 ある。従って,

Proposition 3.

$\Gamma(V_c, \mathcal{O})$ は Stein algebra である。

§2. Stein space の reduction と問題。

§1 の vector bundle V を他の方法で解釈してみよう:
 $\pi: G \rightarrow R$ を projection とし, π による F の引き上げを
 π^*F とすると, $V \cong \pi^*F$ である。

V 内で divisor S に附随する line bundle $[S]$ の G 上の
 restriction $[S]_G$ は, G 上の line bundle $[R]$ に等しい。
 ところで h は hol. divisor だから, 次の hol. map

$$\Phi: \pi^*F \longrightarrow \pi^*F \otimes [S]_G$$

は well-defined である (G 内の R の defining fun. をかける).

$V' = \pi^*F \otimes [S]_G$, V' の R 上の fibre 全体を S' とおくと,

$$(1) \Phi: V-S \cong V'-S'$$

$$(2) \Phi(S) = R,$$

- δ , Suzuki [3] によれば, $[S]_G$ は R の + 命の \mathbb{Z} 体 mbd.

\mathbb{Z} は negative であり, 従って V' は R は exceptional に \mathbb{Z} は

blow down できる (V' は R 上の vector bundle として

$V' = (F \otimes G) \otimes G$ に等しい). さすれば $\omega: V' \rightarrow \underline{V}'$, $\underline{S}' =$

$\omega(S')$ とおくと, 次の hol. maps の列ができた:

$$V \xrightarrow{\Phi} V' \xrightarrow{\omega} \underline{V}',$$

$$V-S \cong V'-S' \cong \underline{V}'-\underline{S}',$$

$$\Phi(S) = R, \quad \omega(R) = \{1 \text{ pt.}\}$$

\underline{V}' は isolated singularity $p_0 = \omega(R)$ をもった Stein space であり, \underline{S}' は p_0 を通る codim. 1 の anal. set である.

又, V_c の V' 内の image を \underline{V}'_c とすると, \underline{V}'_c は \underline{V}' 内で singular point p_0 を頂点に持つ "cone" と考えられ,

$\text{Spec } \Gamma(V_c, \mathcal{O}) \cong \underline{V}'_c$ となる。即ち \underline{V}'_c の頂点 p_0 が

$\text{Spec } \Gamma(V_c, \mathcal{O})$ に complex structure の λ となるような点がある。

Granert [1] の例も同様に reduction 可能である。先ずこの例を説明する。 R, G は前と同じとし、 G の各 fibre に無限遠点をつけ加えた \mathbb{P} -bundle を X とする。 X 内で R を blow down したものを X' とし、 X' 上の negative line bundle を F_1' 、 map $X \rightarrow X'$ で F_1' をひきもどしたものを F_1 とする。次に R 上の infinite order の topologically trivial line bundle F_2' をとり、その X へのひき戻しを F_2 とする。 $F = F_1 \otimes F_2$ 、 F の zero section を \tilde{S} 、 R 上にある F の fibres 全体を S とすると、以下のことが成り立つ:

$$(1) \Gamma(F - \tilde{S} \cup S, \mathcal{O}) \cong \Gamma(F, \mathcal{O})$$

(2) $\Gamma(F, \mathcal{O})$ は Stein algebra ではない。

さて、 $\tilde{S} (\cong X)$ 上に line bundles $[\tilde{S}]$ 、 $[S]$ を制限すると、明らかに、

$$[\tilde{S}]_{\tilde{S}} = F, \quad [S]_{\tilde{S}} = [R],$$

が成り立つ。 $l, m \geq 0$ として \tilde{S} 上の line bundle

$$F^{(l,m)} = ([\tilde{S}]^l \otimes [S]^m)_{\tilde{S}}$$

を考えると、 $[S]_{\tilde{S}}$ が hol. divisor から成り、 \tilde{S} 上の hol. map と同様に hol. map

$$\Phi: F \rightarrow F^{(l,m)}$$

が well defined である。

$F^{(l,m)}$ の zero section を \tilde{S}' とする と $\tilde{S}' \cong \tilde{S}$ であり、
 より R を含んでおくとしてよい。 R 上の $F^{(l,m)}$ の fibers 全体を
 S' とおく。このとき、

$$(1) \Phi: F - S \longrightarrow F^{(l,m)} - S'$$

は葉数 l 枚の hol. map τ 、 S の周りで l 度 l 位の分岐をして
 いる。

$$(2) \Phi(S) = R \subset S'.$$

一方、Suzuki [3] によれば、line bundle $F^{(l,m)}$ は、 (l,m)
 を充分大きくとれば negative になる。従って $F^{(l,m)}$ 内で
 \tilde{S}' は exceptional であり、blow down $\omega: F^{(l,m)} \rightarrow \underline{F}^{(l,m)}$
 を行うことができる。 $\omega(S') = \underline{S}'$ 、 $\omega(\tilde{S}') = p_0$ とおく。

かくしてこの時にも、hol. maps の列

$$F \xrightarrow{\Phi} F^{(l,m)} \xrightarrow{\omega} \underline{F}^{(l,m)}$$

が成り立ち、

$$F - \tilde{S}' \cup S \xrightarrow{l \text{ 枚}} F^{(l,m)} - \tilde{S}' \cup S' \xrightarrow{\sim} \underline{F}^{(l,m)} - \underline{S}'$$

$$\Phi(\tilde{S}' \cup S) = \tilde{S}', \quad \omega(\tilde{S}') = \{p_0\}.$$

よって $\underline{F}^{(l,m)}$ は p_0 を isol. sing. に持つ Stein space τ 、
 \underline{S}' は p_0 を通る codim. 1 の anal. set τ である。なお $\Gamma(\underline{F}^{(l,m)} - \underline{S}', \mathcal{O})$
 $\Gamma(F^{(l,m)} - \tilde{S}' \cup S', \mathcal{O})$ とも non Stein algebra τ であることは各
 易にわかる。

以上2つの例をみると, non Stein algebra をもつ manifold が Stein space 内の singularity に頂点をもつ "cone" に帰着されたことがわかる (Grauert の例でもそうなる, [1]).

このことが一般に可能であると予想することは大胆に過ぎるかもしれないが, しかし non Stein algebra が上のような "cone" の頂点の "resolution" として得られていることは注目値する。その為には先ず手近に次のような問題が考えられるだろう:

Problem Stein space X と, その codim. 1 の anal. subset S が与えられた時, $\Gamma(X-S, \mathcal{O})$ が Stein algebra になる為の条件を述べ。

これはまだわからなないが, 上でみたごとく, なんらかの "有限条件" がでてくまてあろう (§1 の例では F_0 の order, §2 の例では F_2 の order)。

参考文献

1. Grauert, Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten, Math. Zeit., 81, (1963).
2. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Annalen 146 (1962).
3. O. Suzuki, この講究録中の論文 & 論文 these.