数理解析研究所講究録
第209巻 1974年 4-10

或種の連立微分方程式の標準型

神戸大 理　　吉田 正章

§0 序

線型二階常微分方程式

(1) $\ddot{\eta} = p\cdot\dot{\eta} + q\eta$

を考える。変数変換

(2) $\eta = a\cdot\xi$, $\dot{a}/a = p/2$,

を行えば,

(3) $\ddot{\xi} = \tilde{q}\cdot\xi$, $\tilde{q} = q + p^2/4 - \dot{p}/2$

となり、更に, (1)の線型独立な二の解 y_1, y_2 の比 $u = y_1/y_2$ のシュワルツ微分を計算すると,

(4) $\{u\,;x\} = \dfrac{\dddot{u}}{\dot{u}} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^2} = -2\tilde{q}$

となる。我々は (3)の型の方程式を (1)の標準型という。また, (3)の線型独立な二つの解 ξ_1, ξ_2 の函数行列式 $\det\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \dot{\xi}_1 & \dot{\xi}_2\end{bmatrix}$ は定数である.

我々は以下で，完全積分可能な線型微分方程式

(5) $$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{\alpha=1}^{n} g_{ij}^{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial x_\alpha} + g_{ij}^{0} \eta \qquad 1 \leqq i, j \leqq n$$

の標準型が何であるかを考える。

§1　多変数のシュワルツ作用素

この§では，多変数の場合のシュワルツ微分を復習する。私は東大の織田孝幸氏に教えてもらったので，織田氏の記号に従う。

$u_i(x_1, \cdots, x_n) \quad 1 \leq i \leq n, \quad \det \partial u/\partial x \neq 0$

が与えられたとき，射影変換

(6) $$\tilde{u}_i = \frac{\sum a_i^j u_j + a_i^0}{\sum a_0^j u_j + a_0^0} \qquad (a_i^j) \in GL(n+1)$$

で不変な，u_i と u_i の微分を含んだ式を作る。

(7) $$\begin{cases} \xi_0 = \{\det \partial u/\partial x\}^{-\frac{1}{n+1}} \\ \xi_1 = \xi_0 \cdot u_1 \\ \cdots\cdots \\ \xi_n = \xi_0 \, u_n \end{cases}$$

とおくと，u_i の射影変換に対応して，ξ_i は線型変換を受ける。次に，$\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$ を線型独立解とする線型偏微分方程式を作る。

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\partial_{ij} = \partial_{ji} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$ として，

$$(8)\quad \begin{vmatrix} \partial_{ij}\xi & \partial_{ij}\xi_0 & \cdots & \partial_{ij}\xi_n \\ \xi & \xi_0 & & \xi_n \\ \partial_1\xi & \partial_1\xi_0 & & \partial_1\xi_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \partial_n\xi & \partial_n\xi_0 & & \partial_n\xi_n \end{vmatrix} = 0$$

展開して，計算すると，(8) は，

$$(9)\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_j} = \sum_\alpha P_{ij}^\alpha(u)\frac{\partial\xi}{\partial x_\alpha} + P_{ij}^0(u)\,\xi$$

但し．

$$(10)\quad P_{ij}^\alpha(u) = \sum_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_k} - \frac{1}{n+1}\Big(\delta_j^\alpha\sum_{k,l}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k\partial x_i}\frac{\partial x_k}{\partial u_l} + \delta_i^\alpha\sum_{k,l}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k\partial x_j}\frac{\partial x_k}{\partial u_l}\Big)$$

δ：クロネッカー記号

$$(11)\quad P_{ij}^0(u) = \{\det \partial u/\partial x\}^{\frac{1}{n+1}}\Big[\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\{\det \partial u/\partial x\}^{-\frac{1}{n+1}} - \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{\det \partial u/\partial x\}^{-\frac{1}{n+1}}\cdot P_{ij}^\alpha(u)\Big]$$

我々は $P_{ij}^\alpha(u)$，$P_{ij}^0(u)$ をシュワルツ作用素という。

シュワルツ作用素は，$n=1$ の時と $n\geqq 2$ の時で，大いに異ることに注意しよう。即，$n=1$ の場合は，$P_{ij}^\alpha(u) = P_{11}^1(u) = 0$，$P_{11}^0(u) = \dot{u}^{\frac{1}{2}}(\dot{u}^{-\frac{1}{2}})^{\cdot\cdot}$ 故，$P_{11}^0(u)$ が，シュワルツ微分である。$n\geqq 2$ の場合は，(9) が完全積分可能ということを使えば，$P_{ij}^0(u)$ は，$P_{ij}^\alpha(u)$ で表されてしまう。

$$(12)\quad P_{ij}^0(u) = \frac{\partial P_{rj}^r}{\partial x_i} - \frac{\partial P_{ij}^r}{\partial x_r} + \sum_l P_{rj}^l P_{il}^r - \sum_l P_{ij}^l P_{rl}^r$$

§2 標準型

完全積分可能な線型微分方程式系

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_\alpha q^\alpha_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_\alpha} + q^0_{ij}\,\eta$$

が与えられたとする。

$\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n$ を (13) の線型独立な解として,

$$(14) \qquad u_i = \frac{\eta_i}{\eta_0} \qquad 1 \leq i \leq n$$

とおく。

$$(15) \qquad p^\alpha_{ij} = P^\alpha_{ij}(u)$$

とおく.

P^α_{ij} は射影変換で不変な作用素故, p^α_{ij} は. (13) から一意に定る。

<u>定義</u> 方程式 (13) に対して,

$$(14) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_\alpha p^\alpha_{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} + p^0_{ij}\,\xi$$

を (13) の標準化という。また, 標準化しても変らぬもの即ち $p^\alpha_{ij} = q^\alpha_{ij}$ なる方程式 (13) を標準型という。

<u>定理</u>

$$(15) \qquad p^\alpha_{ij} = q^\alpha_{ij} - \frac{\delta^\alpha_j}{n+1} \sum_l q^l_{il} - \frac{\delta^\alpha_i}{n+1} \sum_l q^l_{jl}$$

$$(16) \qquad p^0_{ij} = q^0_{ij} - \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_l q^l_{il} + \frac{1}{n+1} \sum_{\alpha, l} q^l_{\alpha l} q^\alpha_{ij} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \sum_l q^l_{il} \cdot \sum_l q^l_{jl}$$

（証明） $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\eta_0^{-1} - \eta_k\eta_0^{-2}\dfrac{\partial \eta_0}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x_i \partial x_j}\eta_0^{-1} - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_j}\eta_0^{-2} - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_i}\eta_0^{-2} + 2\eta_k\eta_0^{-3}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_j}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_i} - \eta_k\eta_0^{-2}\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$= \eta_0^{-1}\Big(\sum_\alpha g^\alpha_{ij}\frac{\partial \eta_k}{\partial x_\alpha} + g^0_{ij}\eta_k\Big) - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_j}\eta_0^{-2} - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_i}\eta_0^{-2}$$

$$-\eta_k\eta_0^{-2}\Big(\sum_\alpha g^\alpha_{ij}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_\alpha} + g^0_{ij}\eta_0\Big) + 2\eta_k\eta_0^{-3}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_j}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_i}$$

この式を，（10）に代入して，

$$P^\alpha_{ij}(u) = \sum_k \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_k}\Big\{\eta_0^{-1}\Big(\sum_\beta g^\beta_{ij}\frac{\partial \eta_k}{\partial x_\beta} + g^0_{ij}\eta_k\Big) - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_j}\eta_0^{-2}$$

$$- \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_i}\eta_0^{-2} + 2\eta_k\eta_0^{-3}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_j} - \eta_k\eta_0^{-2}\Big(\sum_\beta g^\beta_{ij}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_\beta} + g^0_{ij}\eta_0\Big)\Big\}$$

$$-\frac{\delta^\alpha_j}{n+1}\sum_{k,l}\frac{\partial x_l}{\partial u_k}\Big\{\eta_0^{-1}\Big(\sum_\beta g^\beta_{il}\frac{\partial \eta_k}{\partial x_\beta} + g^0_{il}\eta_k\Big) - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_l}\eta_0^{-2}$$

$$- \frac{\partial \eta_k}{\partial x_l}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_i}\eta_0^{-2} + 2\eta_k\eta_0^{-3}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_l} - \eta_k\eta_0^{-2}\Big(\sum_\beta g^\beta_{il}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_\beta} + g^0_{il}\eta_0\Big)\Big\}$$

$$-\frac{\delta^\alpha_i}{n+1}\sum_{k,l} \text{——}\Big\{\cdots\ (i,j)\ \text{reversed}\ \Big\}$$

——

次に，$\delta^\alpha_\beta = \sum_k \dfrac{\partial x_\alpha}{\partial u_k}\cdot\dfrac{\partial u_k}{\partial x_\beta}$

$$= \sum_k \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_k}\Big(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_\beta}\eta_0^{-1} - \eta_k\eta_0^{-2}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_\beta}\Big)$$

なる関係を作うと，うまく計算できて，（15）を得る。

後半は，

（17） $\{\det \partial u/\partial x\}^{\frac{1}{n+1}}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\{\det \partial u/\partial x\}^{-\frac{1}{n+1}}$

$$= -\frac{1}{n+1}\sum_{k,l}\frac{\partial u_l}{\partial x_k \partial x_i}\frac{\partial x_k}{\partial u_l}$$

を（11）に代入して，（15）を使へば計算できる。

系　方程式(13)が標準型なる為の必要十分条件は，

$$\sum_{l} q_{i\,l}^{\,l} = 0 \qquad 1 \leq i \leq n \qquad \text{である.}$$

系　方程式(13)が標準型ならば，(13)の線型独立な解 $\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n$ の函数行列式は定数である.

(証明)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 \cdots & \xi_n \\ \partial_1 \xi_0 & \cdots & \partial_1 \xi_n \\ \cdots & & \cdots \\ \partial_n \xi_0 & \cdots & \partial_n \xi_n \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} \xi_0 & & \xi_n \\ \cdots & & \cdots \\ \partial_{ij}\xi_0 & \cdots & \partial_{ij}\xi_n \\ \cdots & & \cdots \end{vmatrix} c_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} \xi_0 & \cdots & \xi_n \\ \sum_{\alpha} q_{ij}^{\alpha} \partial_\alpha \xi_0, & \cdots & \sum q_{ij}^{\alpha} \partial_\alpha \xi_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} c_j$$

$$= \sum_{j} \begin{vmatrix} \xi_0 & \cdots & \xi_n \\ q_{ij}^{j}\, \partial_j \xi_0 & \cdots & q_{ij}^{j}\, \partial_j \xi_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} c_j$$

$$= \sum_{j} q_{ij}^{j} \times \begin{vmatrix} \xi_0 & \cdots & \xi_n \\ \partial_1 \xi_0 & & \vdots \\ \partial_n \xi_0 & & \end{vmatrix}$$

系　方程式(13)を標準型(14)にする為には，変数変換

(18)　$\eta = a\,\xi$　，ここで a は

(19)　$d \log a = \dfrac{1}{n+1} \sum_{i} \left(\sum_{l} q_{il}^{l} \right) dx_i$　を充す，

をすればよい。

(証明)　$\eta = a\xi$ とおいて, (13) に代入すると,

$$a\,\partial_{ij}\xi = \sum_\alpha g^\alpha_{ij}\,a\cdot\partial\xi_\alpha - \partial_i a\,\partial_j\xi - \partial_j a\,\partial_i\xi - \partial_{ij}a\cdot\xi + \sum_\alpha g^\alpha_{ij}\,\partial_\alpha a\cdot\xi + g^0_{ij}\,a\,\xi$$

故に,

$$(20)\quad \begin{cases} p^\alpha_{ij} = g^\alpha_{ij} & \alpha \neq i, j \\ p^i_{ij} = g^i_{ij} - \partial_j a/a & i \neq j \\ p^i_{ii} = g^i_{ii} - 2\,\partial_i a/a \end{cases}$$

ここで, 6ページの上の系を使って, (14) が標準型になる為には, $\sum p^l_{il} = 0$ 故,

$$\sum_{l\neq i}\left(g^l_{il} - \partial a_i/a\right) + g^i_{ii} - 2\partial a_i/a = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_l g^l_{il} - (n+1)\,\partial_i a/a = 0\,.$$ (終)

(19) を無理に解けば,

$$(21)\quad a(x) = \exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_i \int_0^1 \sum_l g^l_{il}(tx)\,dt\cdot x_i\right\}$$

となる.

以上§0〜§2 は全く型式的な計算故, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, 更には標数0の体上ならば通用する。色々な応用が考えられるが, ここではすべて省略する。

— 終 —