数理解析研究所講究録
第212巻 1974年 35-44

正の不変測度を持つ力学系について

神戸大 教養　江川 治朗

§1. 序

R^n の領域 D で定義された自律系微分方程式

$$(E) \qquad x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n) \qquad f_i \in C^1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

で定まる力学系を π とする。このとき，

$$(H) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (M f_i)}{\partial x_i} = 0 \qquad M > 0$$

を満たす $M \in C^1$ が存在すれば，任意の可測集合 $A \subset D$ に対して，

$$\mu(A) = \int_A M(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

で定義される測度 μ が正の不変測度になることはよく知られている。しかしながら，(H) の解を求めることは一般にむつかしく，π の定性的性質に非常に関係する。例えば，π

が漸近安定な不変集合を持てば，正の不変測度は存在しないことが容易に示される。L. Markus はある種の積分が求まれば (F) の解が求まることに注意して，$n=2$ の場合に議論した（[3]）。著者は同じく $n=2$ の場合に (F) から離れて，parallelizable の概念を使うことによって，特異点を有限個しか含まない局所力学系に対して，正の不変測度が存在するための条件が極限集合で特徴ずけられることを示した。

この講演では，極限集合という概念は同型写像で不変な性質であることに注目して，正の不変測度と同型写像について議論する。まず最初に，正の不変測度の存在については，特異点がなければある意味で位相的に不変なものであることを示す。つぎに正の不変測度が存在しても一般に唯一つに定まらないが唯一つに定まるものもある。このような力学系はさきの結果を使うことにより，同型写像で不変であることを示す。最後に上記の結果は特異点があれば成り立たない。そのような例を示す。

§2. 基本概念

これより考える局所力学系の相空間は可分な距離空間とする。$\mathcal{L}(X)$ で相空間 X 上のすべての局所力学系をあらわすことにする。$\pi\in\mathcal{L}(X)$ の定義域を D^π とかく。$D^\pi=\bigcup_{x\in X}\{x\}\times D^\pi_x$

(D_x^π は 0 を含む開区間)は $X \times R$ の開集合である。$x \in X$ を通る軌道を $C_\pi(x)$ とかく。π の特異点の集合を S_π とかく。$M \subset X$ が任意の $x \in X$ に対して，$C_\pi(x) \subset M$ を満たすとき，M を不変集合という。$U \subset X$ を開集合又は不変集合とするとき，π の U への制限を $\pi | U$ とかく。μ を X 上の Caratheodory 測度とする。μ がつぎの (*) を満たすとき，μ を正の測度という。

(*) 任意の $x \in X$ の近傍 U に対して，$0 < \mu(V) < \infty$ を満たす x の近傍 $V \subset U$ が存在する。

条件 (*) から容易にわかるように，μ は任意の開集合上で正の値をとり，コンパクト集合上で有限な値をとる。

定義 2－1. $\pi \in \mathcal{L}(X)$，μ を X 上の正の測度とする。任意の μ－可測集合 $A \subset X$ と任意の $A \times \{t\} \subset D^\pi$ を満たす t に対して $\mu(\pi(A,t)) = \mu(A)$ が成り立つとき，μ は π に関して不変であるという。

局所力学系の間の同型写像としてつぎのものを考える([7])。

定義 2－2. $\pi \in \mathcal{L}(X)$，$\rho \in \mathcal{L}(Y)$ とする。X から Y への位相同型写像 h が任意の $x \in X$ に対して，$h(C_\pi(x)) = C_\rho(h(x))$

を満たすとき，$h : \pi \to \rho$ とかき，h を π から ρ への(NS)同型写像という。

$h : \pi \to \rho$ が同型写像であるとき，一般に $h(\pi(x,t)) = \rho(h(x), \varphi(x,t))$ $((x,t) \in D^\pi)$ を満たす φ が存在することが知られている([1],[7])。この φ を h に付随する reparametrization という。一般に φ は $D^\pi - S_\pi \times R$ で二変数の関数として連続であることも知られている。この場合，φ は微分可能ではないが，もし t について連続微分可能であるならば，$\left.\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = M(x)$ とおくことにより

$$\varphi(x,t) = \int_0^t M(\pi(x,s))\,ds \qquad (x,t) \in D^\pi - S_\pi \times R$$

と表現される。T. Ura は [7] で h と φ の対 (h, φ) を π から ρ への GH-同型写像と定義し，φ の型によりいろいろな type にわけた。ここでは議論が複雑になるのでこれ以上ふれないことにする。

§3. 正の不変測度と同型写像について

h を $\pi \in \mathcal{L}(X)$ から $\rho \in \mathcal{L}(Y)$ への同型写像とする。μ を π に関しての正の不変測度，φ を h に付随する reparametrization とする。このとき，h と μ から ρ に

関する正の不変測度を構成することを考える。この問題を考えるにあたって、

$$\rho'(x,t) = h^{-1}\rho(h(x),t) \qquad (x,t)\in \bigcup_{x\in X}\{x\}\times D^{\rho}_{h(x)}$$

とおくと、$\rho'\in \mathcal{L}(X)$ で $h\rho'(x,t)=\rho(h(x),t)$, $\pi(x,t)=\rho'(x,\varphi(x,t))$ なる関係が成り立つ。したがって、時間の変わらない場合には上の問題は容易に示すことができるので、π, $\rho\in\mathcal{L}(X)$, $h=Id_X$ の場合を考察すれば十分である。

補題3-1. $\mathcal{D}^\pi\subset D^\pi$ を $X\times\{0\}$ の近傍とし μ を X 上の正の測度とする。任意の $A\times\{t\}\subset\mathcal{D}^\pi$ に対して $\mu(\pi(A,t))=\mu(A)$ が成り立つならば、μ は π に関する正の不変測度である。

補題3-2. $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ (U_n は X の開集合), μ_n ($n=1,2,\cdots$) は U_n 上の正の測度でつぎの条件を満たす。

(1) $0<\mu_n(U_n)<\infty$

(2) μ_n は $\pi|U_n$ に関する正の不変測度

(3) $A\subset X$ に対して、$\mu_n(A\cap U_n\cap U_m)=\mu_m(A\cap U_n\cap U_m)$.

このとき、任意の $A\subset X$ に対して $\mu(A\cap U_n)=\mu_n(A\cap U_n)$ を満たす π に関する正の不変測度が存在する。

以下 $X-S_\rho$ 上に補題 3-2 の条件を満たすものを構成する。この構成は本質的には [1] による。local section の存在定理により ([4]) $X-S_\rho$ の開被覆 $\{U_n\}$ でつぎの条件を満たすものが存在する。

(1) $U_n = \Phi(F_n, -\tau_n, \tau_n)$ は X の開集合で, F_n は $\pi|U_n$ の section で $U_n = \{\pi(x, \sigma) \mid x \in F_n, |\sigma| < \tau_n\}$.

(2) $0 < \mu(U_n) < \infty$

(3) φ は $D^{\pi|U_n}$ 上で有界である。

各 F_n 上に μ より induce される測度を $\bar{\mu}_n$ とかく。つぎに U_n 上の測度 ν_n を $A \subset U_n$ に対して

$$\nu_n(A) = \int_{x \in F_n} d\bar{\mu}_n \int_{\varphi(x,-\tau_n)}^{\varphi(x,\tau_n)} \chi_A(\rho(x,\sigma))\, d\sigma$$

と定義する。こゝで χ_A は A の特性関数である。この $\{\nu_n\}$ が補題 3-2 の条件を満たすことが証明される。したがってつぎの定理を得る。

定理 3-3. $\pi \in \mathcal{L}(X)$, $\rho \in \mathcal{L}(Y)$, $h: \pi \longrightarrow \rho$ を同型写像 μ を π に関する正の不変測度とする。このとき, $\rho|Y-S_\rho$ に関する正の不変測度 ν を h と μ から構成することができる。さらに ν が任意の $y \in Y$ に対して $\nu(U-S_\rho)<\infty$ であるような y の近傍 U を持つならば, ν は ρ に関

する正の不変測度に拡張される。

系3−5. reparametrization φ が t に関して連続微分可能であるならば, $A \subset Y - S_f$ に対して

$$\nu(A) = \int_{h^{-1}(A)} |M(x)| d\mu(x)$$

と表現される。たゞし $M(x) = \frac{d\varphi(x,t)}{dt}\Big|_{t=0}$ 。

§4. 正の不変測度の個数について.

一般にコンパクト距離空間上の力学系に対しては, よく知られているように, Kryloff・Bogoliuboff の定理によって不変測度の存在が証明されている。しかしながらこの定理で保証される測度は正であるとは限らないし, 又存在しても唯一つに定まるとは限らない。

定義4−1. 局所力学系 π が唯一つの正の不変測度を持つとき, π を strictly ergodic system であるという。

上の定義は [5] によるが, [5] での定義とは少し違う。strictly ergodic system の代表的な例としては, コンパクト相空間上の minimal な概周期的な力学系がある。概周期的な力学系は, 一般にこゝで考えている同型写像では不変では

ない（〔4〕）。しかしながら，§3での議論を使うことによりつぎの定理が容易に証明される。

定理4－1.　$\pi \in \mathcal{L}(X)$, $\rho \in \mathcal{L}(Y)$, $h: \pi \to \rho$ を同型写像とする。このとき π が strictly ergodic system ならば ρ も同様である。唯し，$S_\pi = S_\rho = \phi$ とする。

strictly ergodic な力学系の例はあまりないが，上の定理により n次元トーラス T^n を minimal とする irrational flow に同型なものはこれに屬する。特に $n=2$ の場合には T^2 を minimal にするものはすべて irrational flow に同型であることが示されるので，T^2 を minimal にする力学系はすべて strictly ergodic system である。つぎに特異点がある場合には少し様子が違って定理4－1は一般に成り立たない。そのような例を示す。

例　π をつぎの (E) で定義される T^2 上の力学系とする。

$$(E)\quad \begin{cases} x' = \phi(x,y) \\ y' = \alpha\phi(x,y) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \alpha: \text{無理数} \\ \phi(x,y)=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0). \end{array}$$

上の π と同じ流れを定める力学系は Stepanov flow と呼ばれるが，これに対して今までの議論を使うことにより，正の

不変測度が存在すれば、strictly ergodic system であり存在するための必要十分条件は $\iint_{T^2} \frac{1}{\Phi(x,y)} dx\,dy < \infty$ であることが示される。したがって定理4－1は一般には成り立たない。

REFERENCES

[1] M.Bebutoff et V.V.Stepanoff, Sur la measure invariante dans les systèmes dynamiques qui different que par le temps, Mat. Sbornik, 7 (1949), 143-166.

[2] J.Egawa, Invariant Positive Measures for Flows in the Plane, Funkcial. Ekvac., 15 (1972), 23-38.

[3] L.Markus, Global structure of ordinary differential equations in the plane, Trans. Amer. Math. Soc., 76 (1954), 127-148.

[4] V.V.Nemytskii and V.V.Stepanov, Qualitative theory of differential equations, Princeton Univ. Press, Princeton, 1960.

[5] J.C.Oxtoby, Ergodic sets, Bull Amer. Math. Soc., 58 (1952), 116-136.

[6] J.C.Oxtoby, Stepanoff flows on the torus, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 982-987.

[7] T.Ura, Isomorphism and local characterization of local dynamical systems, Funkcial. Ekvac., 12 (1969), 99-122.