数理解析研究所講究録
第 212 巻 1974 年 55-65

有界な解の初期値の存在領域とリアプノフ関数

岩手大 教育　日野義之

次の方程式を考える.

(1) $$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

ここで $f: I \times R^n \to R^n$, $I = [0, \infty)$, は連続である. (1)のすべての解が共通にある種のtypeの有界性をもつときに, それをリアプノフ関数でcharacterizeすることはYoshizawaの一連の研究によって良く知られている. ここでは(1)が有界な解だけを有するとは限らないときに, 有界な解とそうでない解夫々の初期値の存在する領域をリアプノフ関数を用いて調べる.

(1)の(t_0, x_0)を通る解を$x(t, t_0, x_0)$とし, 最初に有界性に関する定義を述べる.

<u>定義 I</u>. (1)の解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ が

(i) 有界 $\Longleftrightarrow$ ${}^\exists \beta(t_0, x_0) > 0 \ni \|x(t)\| < \beta(t_0, x_0)$ for all $t \geq t_0$,

(ii) $S \subset I \times R^n$ に関して equi-bounded $\Longleftrightarrow$ ${}^\forall t_0 \in I$, ${}^\forall K \subset S(t_0)^i$, compact, ${}^\exists \beta(t_0, K) > 0 \ni$ if $x_0 \in K$, then $\|x(t)\| < \beta(t_0, K)$ for all $t \geq t_0$, ここで $S(t_0)^i$ は S の t_0 における section の内点である.

(iii) $S \subset I \times R^n$ に関して uniform bounded $\Longleftrightarrow$ $^\forall T \in I$, $^\forall K \subset \bigcap_{T \leq t < \infty} S(t_0)^i$; compact, $^\exists \beta(T, K) > 0 \ni$ if $x_0 \in K$, $t_0 \geq T$, then $\|x(t)\| < \beta(T, K)$ for all $t \geq t_0$.

注意. 1. 定義 1 の (ii) と (iii) において $S \equiv I \times R^n$ とすればそれらは夫々通常の equi-bounded, uniform bounded の定義 ([1], [2] を参照) と一致する.

リアプノフ関数 $v(t, x, t_0, x_0)$ として, $I \times R^n \times I \times R^n$ 上で定義された連続スカラー関数で, x に関して locally Lipschitzian であるものを考える. このとき次のことが良く知られている ([2] を参照), すなわち

$$
\begin{aligned}
v'_{(1)}&(t, x, t_0, x_0) \\
&= \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h} \{ v(t+h, x+hf(t,x), t_0, x_0) - v(t, x, t_0, x_0) \} \\
&= \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h} \{ v(t+h, x(t+h), t_0, x_0) - v(t, x, t_0, x_0) \} \\
&= v'(t, x(t), t_0, x_0).
\end{aligned}
$$

上で与えたリアプノフ関数 $v(t, x, t_0, x_0)$ に対し次の定義を与える.

定義 2.

Property A $\Longleftrightarrow$ $v(t_0, x_0, t_0, x_0) = 0$ for every $(t_0, x_0) \in I \times R^n$;

Property B $\Longleftrightarrow$ $v'_{(1)}(t, x, t_0, x_0) \leqq 0$ on $I \times R^n \times I \times R^n$,

Property C $\Longleftrightarrow$ $v(t, x, t_0, x_0)$ は $\|x_0\|$ の関数で $\|x_0\|$ に関して非増加,

Property D $\Longleftrightarrow$ $v(t, x, t_0, x_0)$ は t_0 に関して非減少.

定義 3. $I \times R^n$ の部分集合 Ω_i, $i=1,2$, を次のように定義する.

$$\Omega_1 = \{(t_0, x_0);\ \sup_{t > t_0} \inf_{x} v(t, x, t_0, x_0) > 0\},$$

$$\Omega_2 = \{(t_0, x_0);\ \sup_{\alpha > \|x_0\|} \inf_{\substack{\|x\|=\alpha \\ t \geqq t_0}} v(t, x, t_0, x_0) > 0\}.$$

次の定理は良く知られている, そして定理1と2の証明の際に用いられる.

定理 0. もし (1) の解 $x(t, t_0, x_0) = x(t)$ が, $x(t)$ が存在する限り定数 β, $\beta < \infty$, によって strictly bounded ならば, $x(t)$ は任意の t まで延長可能である.

定理 1. $I \times R^n \times I \times R^n$ 上で定義されたリアプノフ関数 $v(t, x, t_0, x_0)$ が存在して Property A と B をもつとする. この時次が成り立つ.

(i) Ω_1 を出発する (1) のすべての解は finite escape time をもつ,

(ii) Ω_2 を出発する (1) のすべての解は有界.

証明. (i) の証明. $x_0 \in \Omega_1(t_0)$ とし $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ は in the future に存在する (1) の解とする, ここで $\Omega_1(t_0)$ は Ω_1 の t_0

における section である．このとき，$\exists t^* > t_0 \ni \inf_x v(t^*, x, t_0, x_0) > 0$．従って

(2) $$v(t^*, x(t^*), t_0, x_0) > 0.$$

一方 Property A と B より

$$v(t^*, x(t^*), t_0, x_0) \leqq v(t_0, x_0, t_0, x_0) = 0,$$

これは (2) に矛盾．従って (i) が証明された．

(ii) の証明．　$x_0 \in \Omega_2(t_0)$ とする．このとき $\exists \beta = \beta(t_0, x_0) > \|x_0\| \ni \inf_{t \geqq t_0} v(t, x, t_0, x_0) > 0$ for $\|x\| = \beta$．従って，$\forall t \geqq t_0$, $\forall x$, $\|x\| = \beta$，に対して

(3) $$v(t, x, t_0, x_0) > 0.$$

今 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ を (1) の解とし，かつ $\exists t_1 \geqq t_0 \ni \|x(t_1)\| = \beta$ とする．このとき (3) より

(4) $$v(t_1, x(t_1), t_0, x_0) > 0.$$

一方 Property A と B より

$$v(t_1, x(t_1), t_0, x_0) \leqq v(t_0, x_0, t_0, x_0) = 0,$$

これは (4) に矛盾．従って定理 0 より $x(t)$ は有界である．

<u>定理 2</u>．　$I \times R^n \times I \times R^n$ 上で定義されたリアプノフ関数 $v(t, x, t_0, x_0)$ が存在して Property A，B そして C をもつ．このとき次が成り立つ．

(i)　(1) の解は Ω_2 に関して equi-bounded，

更に Property D を仮定すると

(ii)　$\Omega_2(t)$ は t に関して非減少でありかつ (1) の解は Ω_2 に関して uniform bounded.

証明.　(i) の証明.　任意な compact set $K \subset \Omega_2(t_0)$ をとる. 更に K 内の $\|\cdot\|$ に関する maximal element のうちの一つを取り出しそれを x^* とする. このとき $\exists \beta = \beta(t_0, x^*) > \|x^*\| \ni$ $\inf_{t \geq t_0} v(t, x, t_0, x^*) > 0$, for $\|x\| = \beta$. 次に任意な $x_0 \in K$ を取ると x^* の取り方より $\|x^*\| \geq \|x_0\|$, かつ Property C より

$$\inf_{t \geq t_0} v(t, x, t_0, x_0) \geq \inf_{t \geq t_0} v(t, x, t_0, x^*) > 0$$

for $\|x\| = \beta$. 従って $\beta(t_0, K) \equiv \beta(t_0, x^*)$ とおけば残りの証明は定理1の (ii) の後半の証明と同じである.

(ii) の証明.　$\Omega_2(t)$ が t に関して非減少であることは次のようにして容易にわかる. すなわち, $t_1 > t_0$, $x_0 \in \Omega_2(t_0)$ とすると, Property D より

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha > \|x_0\|} \inf_{\substack{\|x\| = \alpha \\ t \geq t_1}} v(t, x, t_1, x_0) &\geq \sup_{\alpha > \|x_0\|} \inf_{\substack{\|x\| = \alpha \\ t \geq t_0}} v(t, x, t_1, x_0) \\ &\geq \sup_{\alpha > \|x_0\|} \inf_{\substack{\|x\| = \alpha \\ t \geq t_0}} v(t, x, t_0, x_0) \\ &> 0.\end{aligned}$$

従って $x_0 \in \Omega_2(t_1)$.

任意な $T \in I$, 任意な compact set $K \subset \Omega_2(T)$ を取る. このとき上で述べたことより $K \subset \bigcap_{T \leq t < \infty} \Omega_2(t)$, 又 (i) で証明されたよう

に $\exists\beta=\beta(T,K)>\max_{x\in K}\|x\|\ni\inf_{t\geqq T} v(t,x,T,x_0)>0$ for $x_0\in K$, $\|x\|=\beta$. 又 $\forall t_0\geqq T$ に対し，再び Property D より

$$\inf_{t\geqq t_0} v(t,x,t_0,x_0)\geqq\inf_{t\geqq T} v(t,x,t_0,x_0)\geqq\inf_{t\geqq T} v(t,x,T,x_0)>0$$

for $x_0\in K$, $\|x\|=\beta$. 従って残りの証明は定理1の(ii)の後半の証明と同じである.

例. 方程式(1)において次を仮定する.

(5) $$\|f(t,x)\|\leqq\lambda(t)\varphi(\|x\|),$$

ここで $\lambda(t)$，$\varphi(r)$は夫々連続関数でありかつ $\lambda(t)>0$ on I，$\varphi(r)>0$ for $r>0$ そして次を満す,

(6) $$\lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^\infty\frac{1}{\varphi(u)}\,du>\int_0^\infty\lambda(s)\,ds,$$

そして

(7) $\varphi(r)$ は r に関して非減少.

(6)より，$\exists x^*\in R^n\ni\int_{\|x^*\|}^\infty\frac{1}{\varphi(u)}\,du>\int_0^\infty\lambda(s)\,ds$. このような x^* を一つ取り fix して次のような $\varphi^*(s)$ を定義する.

(8) $$\varphi^*(s)=\begin{cases}\varphi(s), & s\geqq\|x^*\|,\\ \varphi(\|x^*\|), & \|x^*\|>s\geqq 0.\end{cases}$$

今

$$v(t, x, t_0, x_0) = \int_{\|x_0\|}^{\|x\|} \frac{1}{\varphi^*(u)} du - \int_{t_0}^{t} \lambda(s) ds$$

とおく．このとき φ^* の作り方より $v(t, x, t_0, x_0)$ は $I \times R^n \times I \times R^n$ 上連続．又明らかに x に関して locally Lipschitzian で Property A，C そして D をもつ．(7) と (8) より $\varphi(s) \leqq \varphi^*(s)$ for all $s \geqq 0$ であるから，(5) を用いて

$$\begin{aligned} v'_{(1)}(t, x, t_0, x_0) &\leqq \frac{\lambda(t)\varphi(\|x\|)}{\varphi^*(\|x\|)} - \lambda(t) \\ &\leqq \lambda(t)\left\{\frac{\varphi(\|x\|)}{\varphi^*(\|x\|)} - 1\right\} \\ &\leqq 0. \end{aligned}$$

従って Property B をもつ．一方 (6) より

$$\Omega_2 = \left\{(t_0, x_0);\ \int_{\|x_0\|}^{\infty} \frac{1}{\varphi^*(u)} du - \int_{t_0}^{\infty} \lambda(s) ds > 0\right\} \neq \phi.$$

従って定理2の (ii) より (1) の解は Ω_2 に関して uniform bounded である．

<u>注意2</u>． 条件 (6) の代りに，$\int_0^\infty \lambda(s) ds < \infty$，$\int_R^\infty \frac{1}{\varphi(u)} du = \infty$，$R > 0$，ならば (1) の解が通常の uniform bounded であることは良く知られている（[2] を参照）．

次にスカラー方程式との比較定理について考える．$I\times R^n$ 上で定義された通常のリアプノフ関数 $V(t,x)$ に対して次の定義を与える．

定義4．

Property E $\Longleftrightarrow$ $V(t,x)\geqq a(\|x\|)$，$a(r)$ は連続，増加関数で

$a(r)\longrightarrow\infty$ as $r\longrightarrow\infty$，

Property F $\Longleftrightarrow$ $V(t,x)\geqq 0$ on $I\times R^n$，$V(t,0)=0$，

Property G $\Longleftrightarrow$ $V(t,x)$ は t に関して非増加．

次の方程式を考える．

$$(9)\qquad u'=g(t,u),$$

ここで $g(t,u):I\times R^+\longrightarrow R^1$, $R^+=[0.\infty)$，は連続．そして $g(t,0)=0$ で (9) の 0 一解は unique とする．又 $u(t,t_0,u_0)$ を初期点 (t_0,u_0) をもつ (9) の解とする．以後，取り扱うリアプノフ関数 $v(t,x,t_0,x_0)$ は $I\times R^1\times I\times R^1$ 上で定義されたものとする．次の定理は良く知られている（例えば [3]）．

定理3．$I\times R^n$ 上で定義されたリアプノフ関数 $V(t,x)$ が存在して Property F をもち又

$$(10)\qquad V'_{(1)}(t,x)\leqq g(t,V(t,x))$$

を満す．$r(t)=r(t,t_0,u_0)$，$u_0\geqq 0$，を $t\geqq t_0$ に対して存在する (9) の最大解とする．もし $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ が，$V(t_0,x_0)\leqq u_0$ を満し $t\geqq t_0$ に対して存在する (1) の解ならば，すべての

$t \geq t_0$ に対して

$$V(t, x(t)) \leqq r(t)$$

が成り立つ．

上の定理を用いて次を得る．

<u>定理 4</u>． $I \times R^1 \times I \times R^1$ 上で定義されたリアプノフ関数 $v(t, u, t_0, u_0)$ が存在して property A，B と C をもち，$I \times R^n$ 上で定義されたリアプノフ関数 $V(t, x)$ が存在して property E と F をもち，更に (10) が満される．このとき

$$\Omega_3 = \{(t_0, x_0);\ \sup_{u > V(t_0, x_0)} \inf_{t \geq t_0} v(t, u, t_0, V(t_0, x_0)) > 0\}$$

と置くと次が成り立つ．

(i) (1) の解は Ω_3 に関して equi-bounded,

更に Property D と G を仮定すると，

(ii) $\Omega_3(t)$ は t に関して非減少であり，かつ (1) の解は Ω_3 に関して uniform-bounded.

<u>証明</u>． (i) の証明． 任意な $t_0 \in I$, 任意な compact set $K \subset \Omega_3(t_0)^i$ を取る． $x_0 \in K$ とすると明らかに $V(t_0, x_0) \in \Omega_2(t_0)^i$. $K^* = \{V(t_0, x_0);\ x_0 \in K\}$ とおくと $V(t, x)$ の連続性と K の compact 性より，K^* は compact かつ $K^* \subset \Omega_2(t_0)^i$．従って定理 2 の (i) より $u(t, t_0, V(t_0, x_0))$ を $(t_0, V(t_0, x_0))$ を通る (9) の最大解とすると，$\exists \beta = \beta(t_0, K^*) > \max_{u \in K^*} \|u\| \ni$

(11) $$u(t, t_0, V(t_0, x_0)) < \beta \quad \text{for all } t \geq t_0.$$

$a(r)$ の性質より $^\exists L = L(t_0, K) > 0 \ni a(L) \geq \beta$. 又定理3より

(12) $$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leqq u(t, t_0, V(t_0, x_0)).$$

今 $^\exists t_1 > t_0 \ni \|x(t_1)\| = L$ とする. このとき (11) と (12) と Property E より

$$a(L) \leqq V(t_1, x(t_1)) \leqq u(t, t_0, V(t_0, x_0)) < \beta \leqq a(L),$$

これは矛盾. 従って結論がえられる.

(ii) の証明. 最初に $\Omega_3(t)$ が t に関して非減少であることを示す. 今 $x_0 \in \Omega_3(t_0)$ とし, $^\forall t_1 > t_0$ を取る. Property G より

(13) $$V(t_1, x_0) \leqq V(t_0, x_0).$$

Property C と (13) より

(14) $$v(t, u, t_1, V(t_1, x_0)) \geqq v(t, u, t_1, V(t_0, x_0)).$$

従って Property D と (14) より

$$\sup_{u > V(t_1, x_0)} \inf_{t \geq t_1} v(t, u, t_1, V(t_1, x_0))$$

$$\geqq \sup_{u > V(t_0, x_0)} \inf_{t \geq t_0} v(t, u, t_0, V(t_0, x_0))$$

$$\geqq 0.$$

従って $\Omega_3(t)$ は非減少である.

$^\forall T \in I$, $^\forall$compact set $K \subset \Omega_3(T)^i$ を取ると, 上のことより $K \subset \bigcap_{T \leq t < \infty} \Omega_3(t)^i$. $^\forall x_0 \in K$ を取ると明らかに $V(t, x_0) \in \Omega_3(t)^i$, $t \geq T$. 今 $K^* = \{V(T, x_0), x_0 \in K\}$ とおくと K^* は compact で $K^* \subset \bigcap_{T \leq t < \infty} \Omega_2(t)$. 従って定理2の (ii) より $^\forall t_0 \geq T$ に対して

$u(t, t_0, V(t_0, x_0))$ を $(t_0, V(t_0, x_0))$ を通る (9) の最大解とすると, ${}^{\exists}\beta = \beta(T, K) \geq \sup_{u \in K^*} \|u\| \ni$

$$u(t, t_0, V(t_0, x_0)) < \beta \quad \text{for all } t \geq t_0.$$

従って残りの部分は定理4の (i) と同じく証明できる.

参考文献

[1] T. Yoshizawa, Liapunov's function and boundedness of solutions, Funkcialaj Ekvacioj, 2 (1959), 71-103.

[2] T. Yoshizawa, Stability theory by Liapunov's second method, Mathematical society of Japan, 1966.

[3] V. Lakschmikanthan and S. Leela, Differential and integral inequalities, Academic Press, 1969.