数理解析研究所講究録
第 212 巻 1974 年 66-78

ある種の非線型差分微分方程式の解の漸近的性質について

山梨大 工　栗原光信

§0. 序

差分微分方程式

(0.1)　$u'(t)+Au(t)+Bu(t-\omega)=f(t,u(t))$

について考察する。但し、

(0.2) $\begin{cases} u(t)\text{はN次元ベクトル,} \\ A\text{と}B\text{は}N\times N\text{の定数行列} \\ f(t,u)\text{はN次元ベクトル値関数} \end{cases}$

方程式(0.1)に対応する同次線型方程式を

(0.3)　$u'(t)+Au(t)+Bu(t-\omega)=0$

とする。方程式(0.3)は $u(t)=e^{\lambda t}C$ (CはN−ベクトル)の形の解をもつ。ここで、λは

(0.4)　$\det H(\lambda)=0,\quad H(\lambda)\equiv\lambda I+A+e^{-\lambda\omega}B$

の根である。(0.4)を特性方程式、(0.4)の根を特性根とよぶことにする。

特性根λに対して、方程式(0, 1)の非同次項 $f(t, u)$ が何らかの意味で十分小さければ、方程式(0, 1)が $e^{\lambda t}C$ にある意味で十分近い解 $u(t)$ をもつことが期待される。実際我々は、以下に述べる2つの定理（定理1と定理2）の証明を行うことにする。

この種の漸近的性質を調べる研究は、一般の線型差分微分方程式の解に関して、E. M. Wright [4], Bellman R. & K. L. Cooke [1] があり、関数微分方程式の解に関して、J. K. Hale [2] がある。

定理1. $f(t, u) \equiv A(t)u$ の場合。$A(t) = (A_{ij}(t))$ は $N \times N$ 行列で、各成分 $A_{ij}(t)$ は $t \geqq T$ で連続かつ

(0. 5) $\quad A_{ij}(t) = o(1) \quad$ as $t \to \infty \quad (i, j = 1, \cdots\cdots, N)$

を満すとする。特性根λを単根とする。$\mathrm{Re}\,\lambda = \mu$ とおくと、実数部が μ となる特性根がλ以外に存在しないと仮定する。

このとき、十分大きな $t_0 \geqq T$ をとれば、方程式(0, 1)は $t \geqq t_0$ において、次の漸近的性質をみたす解 $u(t) = (u_j(t))$ を有する。

(0. 6) $$\log \max_{1 \leqq j \leqq N} |u_j(t)| = \mu t + o(t) \quad \text{as } t \to \infty$$

定理 2. $f(t, u)=(f_j(t,u))$

$f_j(t,u) \equiv \sum_{|k|\geq 1} A_k^{(j)}(t)\, u^k \quad (j=1,\cdots\cdots,N)$ の場合。

但し、$k=(k_1,\cdots\cdots,k_N)$ $(k_i\geq 0)$, $u=(u_1,\cdots\cdots,u_N)$

に対し、$|k|=\sum_{i=1}^{N} k_i$, $u^k=u_1^{k_1}\cdots\cdots u_N^{k_N}$ 。

また、$A_k^{(j)}(t)$ はすべて、$t\geq T$ で連続かつ

$$(0.7)\qquad \begin{cases} A_k^{(j)}(t)=o(1) \ \text{as}\ t\to\infty & \text{for } |k|=1 \\ |A_k^{(j)}(t)|\leq M & \text{for } |k|\geq 2, \end{cases}$$

$\sum_{|k|\geq 1} A_k^{(j)}(t)\, u^k$ は $t\geq T$, $\max_{1\leq j\leq N}|u_j|\leq R$ で一様収束。

さらに、特性根 λ は単根とし、$R_e\lambda=\mu<0$ でかつ実数部が μ に等しい特性根が λ 以外に存在しないと仮定する。

このとき、十分大きな $t_0\geq T$ をとれば、方程式 (0.1) は、$t\geq t_0$ において、次の漸近的性質をみたす解 $u(t)=(u_j(t))$ を有する。

$$(0.8)\qquad \log \max_{1\leq j\leq N} |u_j(t)| = \mu t + o(t) \quad \text{as}\ t\to\infty .$$

§1. 積分方程式への変形

N-ベクトル $u=(u_j)$ と $N\times N$ 行列 $A=(A_{ij})$ に対し、

$$\|u\| = \max_{1\leq j\leq N}|u_j|,\quad \|A\|=\max_{1\leq i\leq N}\sum_{j=1}^{N}|A_{ij}|$$

なるノルムを導入する。

方程式 (0.1) に対して、$t_0-\omega\leq t\leq t_0$ における $u(t)$ の値と

$f(t, u(t))$の値が既知であるとすると、(0, 1)のすべての連続な解$u(t)$は次のように表示される。

(1.1) $$u(t) = K(t-t_0)u(t_0) - \int_{t_0-\omega}^{t_0} K(t-\tau-\omega)Bu(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} K(t-\tau)f(\tau, u(\tau))d\tau.$$

但し、$K(t)$は次の性質(i)〜(iv)をみたす一意的な行列値関数である。

(i) $K(t)=0$ for $t<0$, (ii) $K(0)=I$ (単位行列)

(iii) $K(t)$は$t \geqq 0$で連続, $K'(t)$は$t \geqq \omega$で連続.

(iv) $t>0$で $K'(t)+AK(t)+BK(t-\omega)=0$ を満す.

さらに、$K(t)$は次のように展開される。

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} P_n(t).$$

ただし、$\{\lambda_n ; n=1, 2, \cdots\}$はすべての特性根を実数部の大きい順に番号を付したものであり、$P_n(t)$は対応する特性根λ_nの重複度より小さい次数のtの多項式である。

そこで、いま特性根λをとり、これが単根であり、かつλの実数部μと等しい特性根がλ以外に存在しないと仮定する。このとき、$K(t)$を次のように分解する。

(1.2)
$$\begin{cases} K(t) = e^{\lambda t}C_0 + K_1(t) + K_2(t) \\ \text{但し } \|C_0\| = c_0, \quad \mathrm{Re}\,\lambda = \mu, \quad \kappa < \mu < \nu \\ K_1(t)\text{は } t \geqq 0 \text{ で連続}, \quad \|K_1(t)\| \leqq c_1 e^{\kappa t} \\ K_2(t)\text{は } t \leqq 0 \text{ で連続}, \quad \|K_2(t)\| \leqq c_2 e^{\nu t} \end{cases}$$

(1.1)において、$t_0-\omega \leqq t \leqq t_0$ で $u(t)\equiv 0$ とすると、

(1.3) $$u(t)=\int_{t_0}^{t} K(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau$$

一方、$t_1 \geqq t_0$ として、

$$e^{\lambda t}u_1 \quad と \quad -\int_{t_0}^{t_1} e^{\lambda(t-\tau)}C_0 f(\tau,u(\tau))d\tau$$

は、同次方程式(0,3)の解である。また、積分

$$-\int_{t_0}^{\infty} K_2(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau$$

が収束しているならば、これも(0,3)の解である。これらを(1.3)の右辺に加えると、(1.2)の式より、

(1.4) $$\begin{aligned} u(t)= & e^{\lambda t}u_1 + e^{\lambda t}C_0\int_{t_1}^{t} e^{-\lambda\tau}f(\tau,u(\tau))d\tau \\ & +\int_{t_0}^{t} K_1(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau \\ & -\int_{t}^{\infty} K_2(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau \end{aligned}$$

for $t \geqq t_0$,

この場合、$t_0-\omega \leqq t \leqq t_0$ における $u(t)$ は

(1.5) $$\begin{aligned} u(t)= & e^{\lambda t}u_1 - e^{\lambda t}C_0\int_{t_0}^{t_1} e^{-\lambda\tau}f(\tau,u(\tau))d\tau \\ & -\int_{t_0}^{\infty} K_2(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau \end{aligned}$$

for $t_0-\omega \leqq t \leqq t_0$

(1.4)と(1.5)をみたす解 $u(t)$ は $t>t_0$ において、差分微分方程式(0,1)の解になっている。そして、$t_0-\omega \leqq t \leqq t_0$ における $u(t)$ の値はその初期関数となっている。

(1.4)と(1.5)をまとめて、一つの積分方程式と考えて、その解を求めることにしよう。

§2. 基本となる定理

次の積分方程式を考える。但し、$t_1 \geqq t_0$ とする。

(2.1) $$u(t) = e^{\lambda t}u_1 + (K_{t_1}u)(t)$$

但し、

$$(K_{t_1}u)(t) \equiv \begin{cases} e^{\lambda t}C_0\int_{t_1}^{t} e^{-\lambda\tau}f(\tau, u(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{t} K_1(t-\tau)f(\tau, u(\tau))d\tau \\ \qquad -\int_{t}^{\infty} K_2(t-\tau)f(\tau, u(\tau))d\tau \quad \text{for } t \geqq t_0 \\ -e^{\lambda t}C_0\int_{t_0}^{t_1} e^{-\lambda\tau}f(\tau, u(\tau))d\tau - \int_{t_0}^{\infty} K_2(t-\tau)f(\tau, u(\tau))d\tau \\ \qquad \text{for } t_0-\omega \leqq t \leqq t_0 \end{cases}$$

定理 3. 方程式(2.1)に対し、(1.2)を仮定する。さらに、次の条件(i)~(v)を満す定数 $\alpha \geqq 0$, $\delta > 0$, $t_0 \geqq T$ と $[t_0, \infty)$ で連続な関数 $\phi(t)$ と領域 $\Omega \subset [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^N$ が存在すると仮定する。

$$\begin{cases} \text{(i)} & \|u_1\| \leqq \alpha \\ \text{(ii)} & \|f(t, u)\| \leqq \phi(t)\|u\| \quad \text{for } (t, u) \in \Omega \\ \text{(iii)} & \phi(t) \leqq \delta \min\{(\mu-\kappa), (\nu-\mu)\} \quad \text{for } t \geqq t_0 \\ \text{(iv)} & 2(C_0+C_1+C_2)\delta < 1 \\ \text{(v)} & \{(t, u) \mid t \geqq t_0, \|u - e^{\lambda t}u_1\| \leqq \alpha e^{\mu t}\gamma(t, t_1)\} \subset \Omega \end{cases}$$

このとき、方程式(2.1)は $t \geqq t_0 - \omega$ において解 $u(t)$ を有し、この $u(t)$ は次の不等式を満す。

(2.2) $$\|u(t) - e^{\lambda t}u_1\| \leqq \alpha e^{\mu t}\gamma(t, t_1) \quad \text{for } t \geqq t_0$$

但し、$$\gamma(t, t_1) \equiv \exp\left[\delta^{-1}\left|\int_{t_1}^{t}\phi(\tau)d\tau\right|\right]$$

定理3の証明の概略を述べよう。まず、$t \geqq t_0-\omega$で連続な関数全体の集合$C[t_0-\omega,\infty)$において、関数族

$$\mathfrak{F}=\left\{u(t)\ \middle|\ \begin{array}{l} u(t)\in C[t_0-\omega,\infty) \\ \|u(t)-e^{\lambda t}u_1\| \leqq \alpha e^{\mu t}\gamma(t,t_1) \text{ for } t \geqq t_0 \end{array}\right\}$$

を考え、$\mathfrak{F}$に属する任意の関数$u(t)$に対して

$$\overline{u}(t)\equiv(Tu)(t)\equiv e^{\lambda t}u_1+(K_{t_1}u)(t)$$

で定義される作用素Tを考える。これが実際に定義され得ることは、$\mathfrak{F}$に属する任意の関数$u(t)$に対して、不等式

(2.3) $\|\overline{u}(t)-e^{\lambda t}u_1\|=\|(K_{t_1}u)(t)\|$

$$\leqq 2(c_0+c_1+c_2)\delta\alpha e^{\mu t}\gamma(t,t_1) \quad \text{for } t \geqq t_0$$

と、

(2.4) $\|\overline{u}(t)-e^{\lambda t}u_1\|=\|(K_{t_1}u)(t)\|$

$$\leqq 2(c_0+c_2)\delta\alpha e^{\mu t}\gamma(t_0,t_1) \text{ for } t_0-\omega \leqq t \leqq t_0$$

が、仮定の(i),(ii),(iii)を用いて導き得ることからわかる。さらに、仮定の(iv)より、$T\{\mathfrak{F}\}\subset\mathfrak{F}$となることが示される。$T$は$C[t_0-\omega,\infty)$における広義一様収束の位相で連続であり、$T\{\mathfrak{F}\}$は$[t_0-\omega,\infty)$に含まれる任意の有界閉区間で一様有界、かつ同程度連続である。従って、福原氏[3]によって証明された一つの不動点定理より、$T\{u(t)\}=u(t)$をみたす関数$u(t)\in\mathfrak{F}$が存在する。この$u(t)$が求めるべき方程式(2.1)の解である。

系 1. 定理3と同じ仮定をつける。ただし、(ii)の代りに、

(ii′) $\|f(t,u)-f(t,v)\| \leqq \phi(t)\|u-v\|$ for ${}^\forall(t,u),(t,v)\in\Omega$

とする。さらに、方程式(2.1)の解 $u(t)$, $v(t)$ が存在して、

$$\begin{cases} \|u(t)-e^{\lambda t}u_1\| \leqq \alpha_1 e^{\mu t}\gamma(t,t_1) & \text{for } t \geqq t_0 \\ \|v(t)-e^{\lambda t}u_1\| \leqq \alpha_2 e^{\mu t}\gamma(t,t_1) & \text{for } t \geqq t_0 \end{cases}$$

を満すとする。このとき、任意の $t \geqq t_0-\omega$ に対して

$$u(t) \equiv v(t) \qquad \text{for } t \geqq t_0-\omega$$

となる。

系2. 定理3と同じ仮定をつける。ただし、(i)の代りに

(i′) $\|u_1\| = \alpha$

とする。従って、定理3によって(2.1)の解 $u(t)$ で、(2.2)を満すものが存在する。このとき、不等式

$$(2.5) \qquad \|u(t)\| \leqq \frac{2}{1-(C_1+C_2)\delta}\,\frac{\|u(t_1)\|}{e^{\mu t_1}}\,e^{\mu t}\gamma(t,t_1) \quad \text{for } t \geqq t_0$$

が成立する。

系1と系2の証明は省略する。

§3. 主要定理(定理1, 定理2)の証明

定理1の証明の概略を述べよう。$f(t,u) \equiv A(t)u$ の場合。

定理3を適用するために、その仮定をすべて調べる。まず、仮定(1,2)は満されている。従って、定数 C_0, C_1, C_2, μ, K ν が与えられるから、(iv)を満すように十分小さい δ を選ぶことができる。$\phi(t)=\|A(t)\|$ とおくと、(0,5)より $\phi(t)=o(1)$。従って、$t_0 \geqq T$ を十分大きく選べば、(iii)を満すようにできる。このとき、(ii)は $\Omega=[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^N$ として成立している。(V)も同時に成り立つ。故に、(i)を満す α を任意にとれば、定理3により、方程式(2,1)即ち(1,4)と(1,5)は $t\geqq t_0-\omega$ において解 $u(t)$ を有し、この $u(t)$ は(2,2)を満している。この場合、t_1 は $t_0\leqq t_1<\infty$ として固定する。また、この $u(t)$ は、無限積分 $-\int_{t_0}^{\infty}K_2(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau$ を収束させているから、差分微分方程式(0,1)の解でもある。次に、$t_0\leqq t_2<\infty$ なる t_2 を任意にとり、

(3,1) $\quad u_2=u_1+C_0\int_{t_1}^{t_2}e^{-\lambda\tau}f(\tau,u(\tau))d\tau$

とおくと、$u(t)$ は明らかに、(2,1)と同じ型の積分方程式

(3,2) $\quad u(t)=e^{\lambda t}u_2+(K_{t_2}u)(t)$

の解である。然るに、$\|u_2\|=\alpha_2$ ととれば、定理3により、(3,2)も不等式

(3,3) $\quad \|v(t)-e^{\lambda t}u_2\|\leqq\alpha_2e^{\mu t}\gamma(t,t_2)$

をみたす解 $v(t)$ をもつ。一方 $u(t)$ は(2,2)より不等式

$$\|u(t)-e^{\lambda t}u_2\|\leqq\|u(t)\|+\|e^{\lambda t}u_2\|$$

$$\leqq 2(1+C_0)\alpha e^{\mu t}\gamma(t, t_1)$$
$$= \alpha_1 e^{\mu t}\gamma(t, t_2), \quad \left(\alpha_1 = 2(1+C_0)\alpha\gamma(t_2, t_1)\right)$$

を満している。従って、系1より（(ii')は成立しているから）

$$u(t) \equiv v(t) \qquad \text{for } t \geqq t_0 - \omega$$

となる。然るに、系2より、$\|u_2\| = \alpha_2$ ととれば、(3.3)を満す解 $v(t)$ は不等式(2.5)即ち

$$\|v(t)\| \leqq \frac{2}{1-(C_1+C_2)\delta}\frac{\|v(t_2)\|}{e^{\mu t_2}}e^{\mu t}\gamma(t, t_2)$$

を満している。この不等式において $v(t) = u(t)$ とし、$t = t_1$ かつ、（t_2は任意の値をとり得たから）$t_2 = t$ とおくと、

(3.4) $\quad \|u(t)\| \geqq \beta e^{\mu t} / \gamma(t, t_1) \quad$ （βは定数）

を得る。(2.2)と(3.4)は(0.6)が成立することを示している。これで定理1が示された。

次に、定理2の証明の概略を述べよう。まず、$\mathrm{Re}\,\lambda = \mu < 0$ であるから、$\mu < \mu' < 0$ をみたすある μ' をとり、$t \geqq t_0'$ で $Re^{\mu' t} < R$ となるように $t_0' \geqq T$ を選ぶ。定理2の仮定から、$f_j(t, u) = \sum_{|k| \geqq 1} A_k^{(j)}(t)u^k$ が $t \geqq T$, $\|u\| \leqq R$ で一様収束であるから、$f_j(t, u)$ の級数のうち、u_1を含む項をまとめ、次にu_2を含む項をまとめるという具合に部分和を作っていくと、

$$f_j(t, u) = \sum_{i=1}^{N} G_i^{(j)}(t, u)\, u_i$$

の形に表わすことができる。ここで、$G_i^{(j)}(t, u)$ は、$t \geqq t_0'$,

$\|u\| \leqq Re^{\mu' t}$ で一様収束であり，$|G_i^{(j)}(t, u)| = o(1)$ をみたすことがわかる。従って，定理3を適用するために，(iv)をみたすように $\delta > 0$ を定め，次に $t_0'' \geqq t_0'$ を，関数

$$\Phi(t) = \max_{1 \leqq j \leqq N} |G_i^{(j)}(t, u)|$$

が $\Omega'' = \{(t, u) \mid t \geqq t_0'',\ \|u\| \leqq Re^{\mu' t}\}$ において(iii)をみたすように選ぶ。このとき(ii)も同時に成立している。さらに，系1を適用できるようにするため

$$f_j(t, u) - f_j(t, v) = \sum_{i=1}^{N} D_i^{(j)}(t, u, v)(u_i - v_i)$$

の形に変形し，$D_i^{(j)}(t, u, v)$ が $t \geqq t_0'$, $\|u\| \leqq Re^{\mu' t}$, $\|v\| \leqq Re^{\mu' t}$ で一様収束しているようにできるから，同様の議論により，$\Omega''' = \{(t, u) \mid t \geqq t_0''',\ \|u\| \leqq Re^{\mu' t}\}$ において，系1の仮定(ii) が成立するように，$t_0''' \geqq t_0''$ をえらぶことができる。また，定理3の仮定(v) をみたすためには，

$$(3.5) \qquad \|u(t)\| \leqq \|u(t) - e^{\Lambda t}u_1\| + \|e^{\Lambda t}u_1\|$$
$$\leqq 2\alpha e^{\mu t}\gamma(t, t_1) \leqq Re^{\mu' t}$$

すなわち，$2\alpha / R \leqq e^{(\mu' - \mu)t} / \gamma(t, t_1)$ が $t \geqq t_0$ においてみたされるように，$t_0 \geqq t_0'''$ が選べればよい。これは，$\mu' > \mu$ であるから可能である。αは例えば，$\|u_1\| = \alpha$ とおけばよい。よって，定理3により，$t_1 \geqq t_0$を固定すれば，方程式(2，1)即ち(1，4)と(1，5)が(2，2)を満す解$u(t)$を有する。これは差分微分方程式(0，1)の解にもなる。

そこで、任意の $t_2 \geqq t_0$ をとり、次の積分方程式を考える。

(3, 6) $\qquad u(t) = e^{\lambda t} u_2 + (K_{t_2} u)(t)$

但し、 $\qquad u_2 = u_1 + C_0 \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda\tau} f(\tau, u(\tau))\, d\tau$ 　とおく。

今求めた解 $u(t)$ は明らかに (3, 6) の解であり、かつ

(3, 7) $\qquad \|u_2\| \leqq \|u_1\| + c_0 \|u_1\| \gamma(t_2, t_1)$

であるから、次の不等式を満している。

$$\|u(t) - e^{\lambda t} u_2\| \leqq \|u(t)\| + \|u_2\| e^{\mu t}$$
$$\leqq \alpha_1 e^{\mu t} \gamma(t, t_2) \quad (\alpha_1 = (3 + C_0)\|u_1\| \gamma(t_2, t_1))$$

一方、(3, 6) にあらためて定理3を適用するために、(3, 5) の不等式に対応する不等式

$$2\|u_2\| e^{\mu t} \gamma(t, t_2) \leqq R e^{\mu' t},$$

即ち、(3, 7) より、不等式

$$2(1 + C_0)\|u_1\| / R \leqq e^{(\mu' - \mu) t} / [\gamma(t_2, t_1) \gamma(t, t_2)]$$

が $t \geqq t_2$ で成立するように、十分大きな $t_2 \geqq t_0$ を選べばよい。この t_2 に対して、方程式 (3, 6) は解 $v(t)$ を有し、

$$\|v(t) - e^{\lambda t} u_2\| \leqq \alpha_2 e^{\mu t} \gamma(t, t_2) \quad (\alpha_2 = \|u_2\|)$$

を満すような解 $v(t)$ を有することが、定理3により導かれる。しかも、系1より $t \geqq t_0 - \omega$ で $u(t) \equiv v(t)$ である。然るに、系2より、(3, 6) の解 $u(t)$ として、(2, 5) に対応する不等式が成立するから、定理1の証明の場合と同様にして、(3, 4) の形の不等式が導かれる。これで、定理2が証明された。

参考文献

[1] Bellman R. & K. L. Cooke; Asymptotic behavior of solutions of differential-difference equations, Mem. Amer. Math. Soc. No. 35 (1959)

[2] Hale J. K.; Linear asymptotically autonomous functional differential equations, Rend. Circ. Math. Palermo,

[3] Hukuhara M.; Sur les points singuliers des équation différentielles linéaires: Domaine réel, Jour. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. 2, Vol. 2 (1934)

[4] Wright E. M.; The linear difference-differential equation with asymptotically constant coefficients, Amer. J. Math., Vol. 70, (1948).