数理解析研究所講究録
第213巻 1974年 32-48

1次元テセレーションオートマタの完全性

東北大 通研 那須正和
本多波雄

はしがき，「任意の有限パターンがテセレーションオートマトンの並列変換を順次施すことによって，原始パターンから生成することができるかどうか」という問題が〔1〕によって提起されたテセレーションオートマトン（以後TAという）の完全性の問題である。部分的な解答は〔1〕,〔2〕,〔3〕,〔4〕において得られている。1次元の場合に限っていえば，2シンボル巾2のTAは不完全であり〔1〕，全ての $k\geq 2$ と $n\geq 3$ に対して，k シンボル巾 n のTAは完全であることが知られている〔3〕〔4〕。今までに得られた完全性に関する結果においては，パターンの生成は一般に単調ではない方法によって与えられていた。尚〔1〕において，2シンボル巾3のTAの場合，強単調生成できない2シンボルパターンの存在が示されている。

この報告においては，$k\geq 3$ ならば，任意の長さが2以上の k シンボルパターンは，k シンボル巾2のTAによって，

強単調生成されるということと，ゼロパターンを除く任意の2シンボルパターンは，2シンボル巾3のTAによって単調生成されるということを示す。これらの証明は[5][6]に用いられたグラフ的方法によってなされる。

1，準備

Σをシンボルの有限集合とする。静止シンボルといわれる特別なシンボル0がΣに含まれているものとする。Σ^*は空系列Λを含む全てのΣの元の有限系列の集合とする。任意の$x \in \Sigma^*$に対して，$\bar{0}x\bar{0}$は左右両方向にのびる次のような無限系列$\cdots 000x000 \cdots$をあらわすものとする。このような無限系列をΣ上の有限パターン，あるいは単にパターンという。$\bar{0}\Lambda\bar{0}$をゼロパターンという。全てのΣ上のパターンの集合をΣ^Pであらわす。$\Sigma^K=(\Sigma-\{0\})\Sigma^*(\Sigma-\{0\})$とおく。任意の$p \in \Sigma^P$に対して，$p=\bar{0}x\bar{0}$となるような$x \in \Sigma^K \cup \{\Lambda\}$がただ1つ存在するが，この$x$を$p$の核ということにする。$x \in \Sigma^*$に対して，$|x|$は$x$の長さを示す。$p \in \Sigma^P$の長さは$p$の核の長さであると定義し，それを$|p|$であらわす。

Σ上の巾nのTAの局所写像σとは，Σ^nからΣへの写像で，$\sigma(0^n)=0$を満足するものである。このような写像を，Σ上の巾nの局所写像と略していうことにする。Σ上の巾nの局所写像σの並列写像f_σとは次のように定められるΣ^PからΣ^P

への写像である。$f_\sigma(\bar{0}a_1a_2\cdots a_m\bar{0}) = \bar{0}\sigma(0^{n-1}a_1)\sigma(0^{n-2}a_1a_2)\cdots\sigma(0a_1\cdots a_{n-1})\sigma(a_1a_2\cdots a_n)\sigma(a_2\cdots a_{n+1})\cdots\sigma(a_{m-n+1}\cdots a_m)\sigma(a_{m-n+2}\cdots a_m0)\cdots\sigma(a_m0^{n-1})\bar{0}$

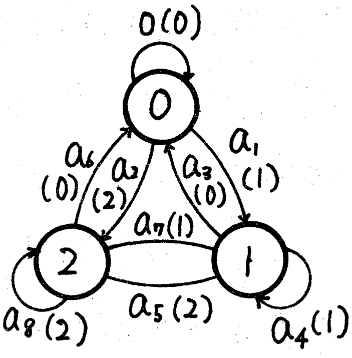
但し $a_i \in \Sigma$ $(1\leq i\leq n)$。$p, q \in \Sigma^{P}$ に対して，$q=f_\sigma(p)$ ならば q は p のサクセサーといい，p は q のプレデイセサーという。A を Σ 上の局所写像の集合とする。$p, q \in \Sigma^{P}$ に対して，$p=q$ であるか，あるいは Σ^{P} の元の列 $p_0, p_1, \cdots, p_\ell$ 及び A の元の列 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\ell$ が存在して，$p_0=p$, $f_{\sigma_i}(p_{i-1}) = p_i$ $(1\leq i\leq m)$ かつ $p_\ell = q$ となるとき，q は p より A によって生成されるという。このとき $|p_{i-1}|\leq|p_i|$ $(1\leq i\leq \ell)$ であるならば q は p より A によって単調に生成されるという。$|p_{i-1}|<|p_i|$ $(1\leq i\leq \ell)$ ならば q は p から A によって単調に生成されるという。

$\Sigma=\{0,1,\cdots,k-1\}$ とする。Σ 上の巾 n の局所写像の集合を L_n^k とおく。k シンボル巾 n TA の完全性問題とは「任意の $p\in\Sigma^{P}$ は $\bar{0}1\bar{0}$ より L_n^k によって生成されるか」という問題である。

次に〔6〕で導入した局所写像の遷移グラフを定義する。G_n^k は k^{n-1} 個の節と k^n 個の有向弧を持つ連結グラフである。G_n^k の各節は Σ^{n-1} の元によってラベルされており，各節とそのラベルとは1対1に対応している。k^n 個の有向弧は次のように節を

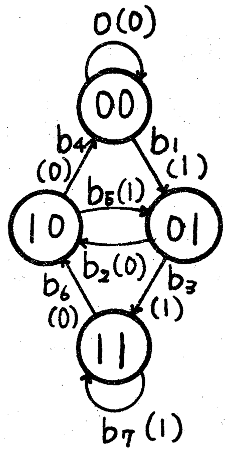
結んでいる。ラベルがそれぞれ $c_1c_2\cdots c_{n-1}$ と $d_1d_2\cdots d_{n-1}$ であるような2つの節 v_i と v_j は $c_2c_3\cdots c_{n-1}=d_1d_2\cdots d_{m-1}$ であるときかつそのときに限り，v_i を始端とし，v_j を終端とする弧 (v_i,v_j) によって結ばれている。さらに G_n^k の各弧 (v_i,v_j) には，v_j のラベルの右端のシンボルがその弧のプレディセサーシンボルとして割りあてられる。弧 e のプレディセサーシンボルを $\delta(e)$ とかく。$\sigma\in L_n^k$ に対して，$G_n^k[\sigma]$ は G_n^k の各弧 (v_i,v_j) にプレディセサーシンボルとは別に，Σ の元をサクセサーシンボルとして割りあてたものである。弧 (v_i,v_j) に対して，v_i，v_j のラベルがそれぞれ $c_1c_2\cdots c_{n-1}$，$c_2c_3\cdots c_n$ であるとき，(v_i,v_j) のサクセサーシンボル $\lambda((v_i,v_j))$ は $\sigma(c_1c_2\cdots c_n)$ であると約束する。$\sigma\in L_n^k$ と $G_n^k[\sigma]$ との間には1対1の対応が存在することは明らかである。

	σ
00	0
01	a_1
02	a_2
10	a_3
11	a_4
12	a_5
20	a_6
21	a_7
22	a_8



$G_2^3[\sigma]$

	τ
000	0
001	b_1
010	b_2
011	b_3
100	b_4
101	b_5
110	b_6
111	b_7



$G_3^2[\tau]$

図1

図1に任意の$\sigma \in L_2^3$と$\tau \in L_3^2$に対する$G_2^3[\sigma]$と$G_3^2[\tau]$が描かれている。この図において，各節は円であらわされており，円の中にその節のラベルがかかれている。各弧の上に，それぞれのサクセサーシンボルとプレデイセサーシンボル（括弧がつけられている）が示されている。プレデイセサーシンボルは，その弧の終端節のラベルにより決まるから，図示する際には，以後省略される。

$\sigma \in L_n^k$の遷移グラフ$G_n^k[\sigma]$において，ラベルが0^{n-1}であるような節をv_0とおくと，弧(v_0, v_0)のサクセサーシンボルは，全てのσに対して0である。$G_n^k[\sigma]$の道$s = e_1 e_2 \cdots e_m$（e_i $(1 \leq i \leq m)$は$G_n^k[\sigma]$の弧）に対して，sのプレデイセサー列$\delta(s)$及びサクセサー列$\lambda(s)$を次のように定める。

$\delta(s) = \delta(e_1)\delta(e_2)\cdots\delta(e_m)$　　　$\lambda(s) = \lambda(e_1)\lambda(e_2)\cdots\lambda(e_m)$

S_n^kを$(v_0, v_{i_1})(v_{i_1}, v_{i_2})\cdots(v_{i_m}, v_0)$の形をし，$v_{i_1} \neq v_0$かつ$v_{i_m} \neq v_0$を満足するような全ての$G_n^k$（あるいは$G_n^k[\sigma]$）の道の集合とする。任意の$s \in S_n^k$に対して，ある$x \in \Sigma^k$が存在し$\delta(s) = x0^{n-1}$となる。逆に任意の$x \in \Sigma^k$に対して，$\delta(s) = x0^{n-1}$となるような$s \in S_n^k$がただ一つ存在する。$G_n^k[\sigma]$の定め方から明らかなように，任意の$p \in \Sigma^p$に対して，その核が$x$であり，$\delta(s) = x0^{n-1}$ $(s \in S_n^k)$であるとすると，$f_\sigma(p) = \bar{0}\lambda(s)\bar{0}$となる。

補題 任意の$\sigma \in L_n^k$と核$x \neq \Lambda$を持つ$p \in \Sigma^p$に対して pが長さが$|p|$よりνだけ小さいf_σによるプレディセサーを持つということと，$G_n^k[\sigma]$において，ある$s \in S_n^k$が存在して，$\lambda(s)=0^i x 0^j$かつ$\nu = n-1-i-j$となることとは同じである。

［証明］ ある$s \in S_n^k$に対して，$\lambda(s)=0^i x 0^j$かつ$\nu = n-1-i-j$とする。ある$y \in \Sigma^k$に対して$\delta(s)=y0^{n-1}$かつ$f_\sigma(\bar{0}y\bar{0})=\bar{0}x\bar{0}=p$ $|\delta(s)|=|\lambda(s)|$であるから，$|p|-|\bar{0}y\bar{0}|=|x|-|y|=n-1-i-j=\nu$。逆も同様にしていえる。

この節の最後に$\sigma \in L_m^k$と$\sigma' \in L_n^k$の積$\sigma\sigma' \in L_{m+n-1}^k$を定義しておく。$\sigma\sigma'(a_1 a_2 \cdots a_{m+n-1})=\sigma'(\sigma(a_1 a_2 \cdots a_m)\sigma(a_2 a_3 \cdots a_{m+1})\cdots\sigma(a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}))$ 但し $a_i \in \Sigma$ $(1 \le i \le m+n-1)$

2 $k(\ge 3)$シンボル巾2テセレーションオートマトンの完全性

$\Sigma=\{0,1,\cdots,k-1\}$，但し $k \ge 3$とする。$\sigma_0 \in L_2^k$を次のように定める。$\sigma_0(ii)=0$ $(i \in \Sigma)$ $\sigma_0(ij)=j$ $(i \in \Sigma,\ j \in \Sigma-\{0\},\ i \neq j)$ $\sigma_0(i0)=i$ $(i \in \Sigma-\{0\})$。

$G_0=G_2^k[\sigma]$とおく。G_0は$0,1,2,\cdots,k-1$でラベルされたk個の節とそれぞれがある。$0 \le i,\ j \le k-1$に対して，ラベルがiである節から，ラベルがjである節へ向う弧であるようなk^2個の弧からなりたっている。任意の$v_i \neq v_0$であるよ

うなG_0の節v_iに対して，弧(v_0, v_i)と(v_i, v_0)のサクセサーシンボルは0ではない。したがって任意の$s \in S_2^k$に対して，$\lambda(s)$はΣ^kの元である。$R_0 = \{\lambda(s) \mid s \in S_2^k\}$とおくと，$R_0$の元を核とするような任意のパターン$p \in \Sigma^p$は$|p|$より長さが1だけ小さい$f_{\sigma_0}$によるプレディセサーを持つことが補題からいえる。

さらに，G_i $(1 \leq i \leq k-1)$を次のように定める。G_0において，0でラベルされた節のラベルをiとし，iでラベルされていた節のラベルを0とする。その他の節のラベル及び各弧のサクセサーシンボルはG_0と同じとする。図2に$k=3$の場合のG_i $(0 \leq i \leq k-1)$が描かれている。

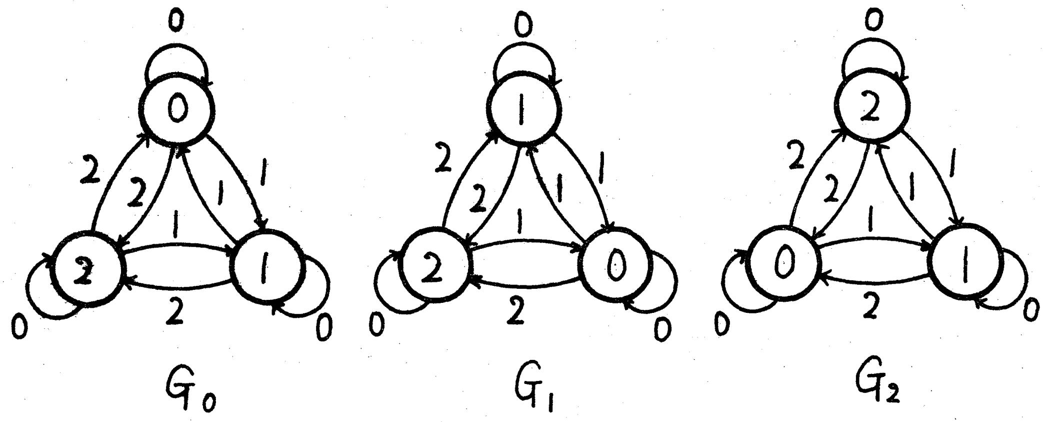


図 2

G_0の弧で(v_j, v_j)のような形を持つもののサクセサーシンボルは全て0であるから，G_iはある$\sigma_i \in L_2^k$の遷移グラフ

とみなすことができる。S_iを次のような形を持つ道の全ての集合とする。$(v, v_{j_1})(v_{j_1}, v_{j_2})\cdots(v_{j_{m-1}}, v_{j_m})(v_{j_m}, v)$ $(m \geq 1)$ 但し，vはG_0においてラベルiを持つ。(したがってvはG_iで考えると，ラベル0を持ち，S_iはS_2^kに等しくなる。)
G_0において，$v_i \neq v_j$であるような任意のv_iとv_jに対して，弧(v_i, v_j)及び(v_j, v_i)のサクセサーシンボルはそれぞれ0ではないから，S_iの全ての元のサクセサー列はΣ^kの元である。$R_i = \{\lambda(s) \mid s \in S_i\}$とおくと，補題より，$R_i$の元を核とするような任意のパターンは$f_{\sigma_i}$によって，長さが1だけ小さいプレデイセサーを持つことがわかる。そこで$R = \bigcup_{i=0}^{k-1} R_i$とおき，$R$がどのような集合であるかを考える。

G_0をオートマトンA_0の遷移グラフと考えることにする。すなわち $0 \leq i \leq k-1$ でラベルされた節はA_0の状態iに対応するものとし，それぞれi, jでラベルされた節u, vに対して $\lambda(u, v) = l$ であるときかつそのときに限り，A_0において入力シンボル $l \in \Sigma$ に対する，状態iから状態jへの遷移が行われるものとする。このように考えると，R_iはA_0において初期状態と最終状態をiとするような有限オートマトンによって受理されるΣ^kの元の集合ということになる。$[i]$をA_0の状態集合 $Q = \{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$ からQへの写像で$[i](j)$ は A_0が状態jから入力シンボルiによって遷移する状態であるとし

て定められるものとする。（G_0の定義よりA_0の遷移は決定性であるから，$[i]$は上のように定義してさしつかえない）。

$[i_1 i_2 \cdots i_u]$を$[i_1], [i_2], \cdots, [i_u]$の写像としての積とする。すなわち，$j \in Q$に対して$[i_1 i_2 \cdots i_u] = [i_u]([i_{u-1}](\cdots [i_2]([i_1](j))\cdots))$，$i_t \in \Sigma$ $(1 \leq t \leq u)$とする。一般に写像 $g: Q = \{0, 1, 2, \cdots, k-1\} \longrightarrow Q$を$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & \cdots, & k-1 \\ g(0), & g(1), & g(2), & \cdots, & g(k-1) \end{pmatrix}$とあらわすことにすると，$G_0$の定義から，$[0] = \begin{pmatrix} 0, & 1, & \cdots, & k-1 \\ 0, & 1, & \cdots, & k-1 \end{pmatrix}$（恒等写像），

$$[i] = \begin{pmatrix} 0, & 1, & \cdots, & i-1, & i, & i+1, & \cdots, & k-1 \\ i, & i, & \cdots, & i, & 0, & i, & \cdots, & i \end{pmatrix} \quad (i \in \Sigma - \{0\})。$$

$x \in \Sigma^k$が$R = \bigcup_{i=0}^{k-1} R_i$の元であるための必要かつ十分な条件は，

$[x] = \begin{pmatrix} 0, & 1, & \cdots, & k-1 \\ \mu_0, & \mu_1, & \cdots, & \mu_{k-1} \end{pmatrix}$とすると，ある$0 \leq t \leq k-1$に対して

$\mu(t) = t$となることである。全ての$i \in \Sigma - \{0\}$に対して，

$$[i^{2m}] = \begin{pmatrix} 0, & 1, & \cdots, & i-1, & i, & i+1, & \cdots, & k-1 \\ 0, & 0, & \cdots, & 0, & i, & 0, & \cdots, & 0 \end{pmatrix} \quad (m \geq 1)$$

$$[i^{2m+1}] = [i]$$

かつ，任意の$j \in \Sigma - \{0, i\}$と$m \geq 1$に対して，

$$[i^m j] = \begin{pmatrix} 0, & 1, & \cdots, & k-1 \\ j, & j, & \cdots, & j \end{pmatrix}$$

となり，したがって任意の$x \in \Sigma^*$に対して，ある$l \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$が存在して

$$[i^m j x] = \begin{pmatrix} 0, & 1, & \cdots, & k-1 \\ l, & l, & \cdots, & l \end{pmatrix}$$

となる。したがって，θ を $\theta(0)=\Lambda$，$\theta(i)=i$ $(i\in\Sigma-\{0\})$ で定まる Σ^* から Σ^* への準同型写像であるとすると

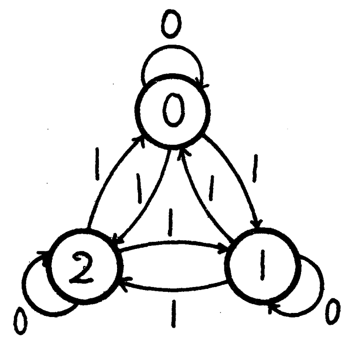
$$R=\{x\in\Sigma^k \mid \theta(x)\in \bigcup_{\substack{i\neq j\\ i,j\neq 0}} i\,i^*j\{1,2,\cdots,k-1\}^* \cup \bigcup_{i\neq 0} i^2\{i^2\}^*\}$$

そこで $\sigma_k\in L_2^k$ を次のように定められる G_k に対して $G_2^k[\sigma_k]=G_k$ となるようなものとする。G_k は G_2^k において，任意の節 v に対して弧 (v,v) にサクセサーシンボル 0 を割りあて，その他の全ての弧にはサクセサーシンボル 1 を割りあてて得られるものとする。図3は $k=3$ の場合の G_k を示している。

G_k において，全ての S_2^k の元のサクセサー列の集合を R_k とおくと

$$R_k=\{x\in\Sigma^k \mid \theta(x)\in 111^*\}\text{。}$$

したがって補題より，R_k の元をその核とする任意のパターンは f_{σ_k} によって長さが1だけ小さいプレデイセサーを持つことがいえる。



G_3

図3

さらに σ_{k+1} を次のように定める。$\sigma_{k+1}(0)=0$ $\sigma_{k+1}(i)=i+1$ $(i\in\Sigma-\{0,k-1\})$ $\sigma_{k+1}(k-1)=0$。そして $1\leq l\leq k-1$ に対して，$\sigma_{k,l}=\sigma_k(\sigma_{k+1})^{l-1}$ とおく。$G_2^k[\sigma_{k,l}]$ を考えれば $R_{k,l}$ の元を核とする任意のパターンは $f_{\sigma_{k,l}}$ によ

って長さが1だけ少いプレデイセサーを持つことは明白である。但し

$R_{k,l} = \{x \in \Sigma^k \mid \theta(x) = lll^*\}$　$(1 \le l \le k-1)$。

$R \cup \bigcup_{l=1}^{k-1} R_{k,l} = \Sigma^k - \{1, 2, \cdots, k-1\}$ であるから，次のことがいえる。任意の $p \in \Sigma^P$ に対して，ある $\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \sigma_{k,2}, \cdots, \sigma_{k,k-1}\}$ の中の元の列 $\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2}, \cdots, \sigma_{j_m}$ とパターンの列 $P_0, P_1, \cdots, P_m$ とが存在して，$P_0 = P$，$P_t = f_{\sigma_{j_t}}(P_{t+1})$　$(0 \le t \le l-1)$，$|P_t| - |P_{t+1}| = 1$，かつ，ある $1 \le i \le k-1$ に対して $P_m = \bar{0} i \bar{0}$ となる。このとき σ_{j_m} が $\sigma_k, \sigma_{k,2} \cdots, \sigma_{k,k-1}$ のいずれかであるとき，$P_m = \bar{0} 1 \bar{0}$ とすることができる。$\sigma_{i,l} = \sigma_{k+1}^{l} \sigma_i$　$(0 \le i \le k-1,\ 1 \le l \le k-2)$ とする。$(f_{\sigma_{k+1}})^l(\bar{0} 1 \bar{0}) = \bar{0}(l+1)\bar{0}$　$(1 \le l \le k-2)$ であることを考慮して，次の命題1と系1を得る。

命題1，$k \ge 3$ ならば，長さ2以上の任意の k シンボル有限パターンは $\bar{0} 1 \bar{0}$ から $\{\sigma_i \mid 0 \le i \le k+1\} \cup \{\sigma_{k,l} \mid 2 \le l \le k-1\} \cup \{\sigma_{i,l} \mid 0 \le i \le k-1,\ 1 \le l \le k-2\}$ によって強単調に生成される。

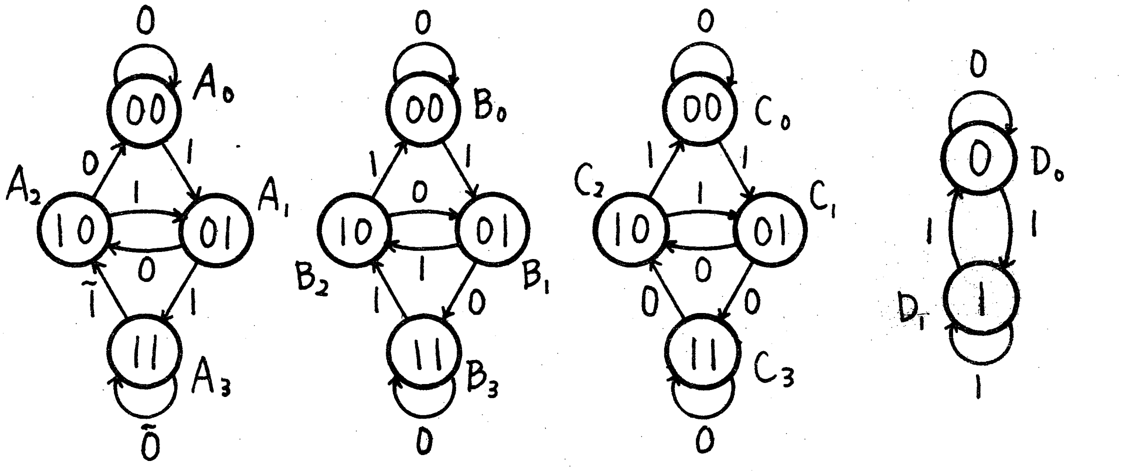
系1，$k \ge 3$ ならば，ゼロパターンを除く任意の k シンボル有限パターンは $\bar{0} 1 \bar{0}$ から $\{\sigma_i \mid 0 \le i \le k+1\}$ によって単調に生成される。

定理1，$k \ge 3$，$n \ge 2$ ならば，長さ2以上の任意の k シンボル有限パターンは $\bar{0} 1 \bar{0}$ から L_n^k によって強単調に生成される。

3, 2シンボル中3テセレーションオートマトンの完全性

この節では，ゼロパターンを除く任意の2シンボル有限パターンはL_3^2によって$\bar{0}1\bar{0}$から単調に生成されることをいう。

$\Sigma=\{0,1\}$とする．$\tau_0,\tau_1,\tau_2,\in L_3^2$と$\tau_3\in L_2^2$を図4で示す$H_0,H_1,H_2,H_3$，に対して，$G_3^2[\tau_0]=H_0$，$G_3^2[\tau_1]=H_1$，$G_3^2[\tau_2]$ $=H_2$かつ$G_2^2[\tau_3]=H_3$の関係を持つものとする。



H_0　　H_1　　H_2　　H_3

図4

（注．H_1はH_0の節の各ラベルijを$(1-i)(1-j)$でおきかえて得られたものである。）図4に示されているように，H_0，H_1,H_2,H_3の各節はそれぞれA_i,B_i,C_i $(0\leq i\leq 2)$ D_j $(0\leq j\leq 1)$のどれかによって名付けられている。これからH_0,H_1,H_2，H_3をそれぞれ有限オートマトン（非決定性の場合を含む）の状態遷移グラフとみることにする。すなわちLをA, B, C, Dのどれかとするとき，オートマトンLは状態集合$\{L_i\}$を持ち

L_iからL_jへの入力シンボル$l \in \Sigma = \{0, 1\}$に対しての状態遷移のあることと，対応する局所写像の遷移グラフにおいて弧(L_i, L_j)のサクセサーシンボルがlであることは等しいものとする。初期状態をL_0とし，最終状態をL_jとしたときのオートマトンLによって受理されるΣ^kの元の集合を，$L[j]$とする。又，$x \in \Sigma^k$がそれを核とするパターンが局所写像τ_jの並列写像f_{τ_j}によって長さがνだけ減るようなプレデイセサーを持つときかつそのときに限り$x \in \alpha[\tau_j, \nu]$であるとして$\Sigma^k$の部分集合$\alpha[\tau_j, \nu]$を定義する。そうすると補題から直ちに，

(1) $A[1] \subset \alpha[\tau_0, 0]$ (2) $A[2] \subset \alpha[\tau_0, 1]$ (3) $A[3]$の元を核とするパターンはf_{τ_0}によってはプレデイセサーを持たない。(4) $B[0] \subset \alpha[\tau_1, 2]$ (5) $C[0] \subset \alpha[\tau_2, 2]$ (6) $D[0] \subset \alpha[\tau_3, 1]$

となることがわかる。

オートマトンAは決定性であるから$A[1] \cup A[2] \cup A[3] = \Sigma^k$である。$A[1]$は$H_0$において，$(A_0, A_1)$又は$(A_0, A_1)(A_1, v_2)(v_2, v_3) \cdots (v_{m-1}, v_m)(v_m, A_1)$ $(m \geq 2)$の形の道のサクセサー列である。そのような道の集合をS_1とおく。S_1に属する道で，弧(A_3, A_2)を通らないものをS_{10}，少くとも1度は(A_3, A_2)を通るS_1の道の集合をS_{11}とする。S_{10}の元のサクセサー列の集合をT_{10}とし，S_{11}の元のサクセサー列の

集合をT_{11}とすると，明らかに$T_{10}\cup T_{11}=A[1]$である。H_0の弧の内でそのサクセサーシンボルとプレデイセサーシンボルが異なるものは(A_3, A_3)と(A_3, A_2)のみである。このことを図4において，(A_3, A_3)と(A_3, A_2)のサクセサーシンボルの上に～印をつけて示してある。$T_{10}=(100^*)^*1$であるから，明らかに，

(7) $T_{10}-\{1\}\subset C[0]$

$x=a_1a_2\cdots a_m$を核とするパターンpに対して，$\eta(p)=a_1+a_2\cdot 2+\cdots+a_m 2^{m-1}$と定義すると，

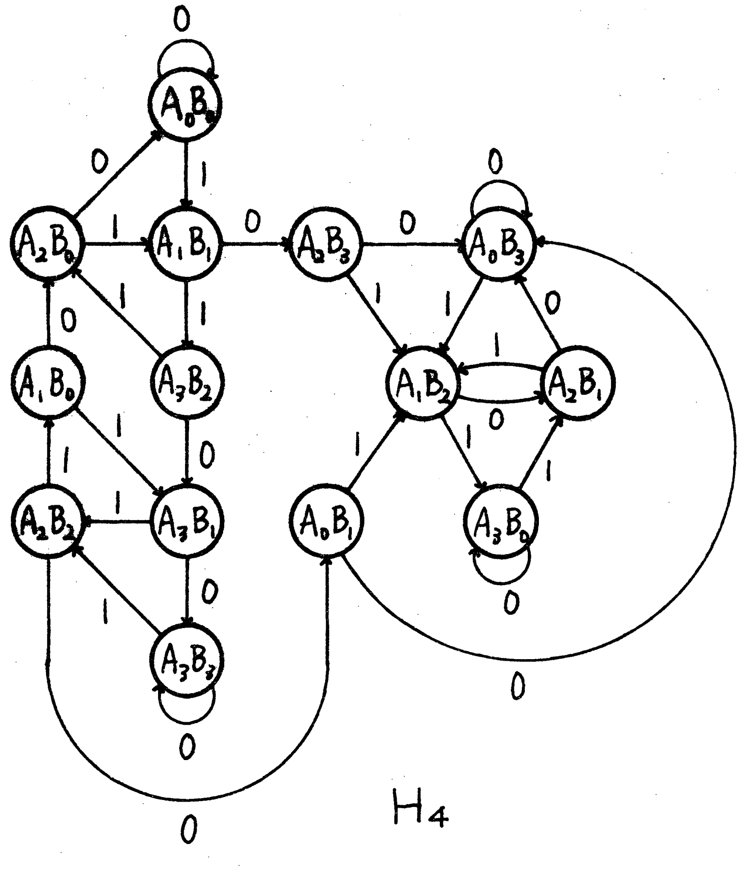
(8) $x\in T_{11}$に対して，$\bar{0}x\bar{0}$のt_{τ_0}によるプレデイセサーを$\bar{0}y\bar{0}$とすると，$\eta(\bar{0}x\bar{0})>\eta(\bar{0}y\bar{0})$である。

(証明) $s=e_1e_2\cdots e_m\in S_1$のサクセサー列が$x=a_1a_2\cdots a_m$，プレデイセサー列が$b_1b_2\cdots b_m$であるとする。条件より，どれかの$e_j$ $(1\le j\le m)$は(A_3, A_2)に等しい。$e_j=(A_3, A_2)$かつ$e_{j+1},\cdots,e_m$は全て(A_3, A_2)ではないというようにe_jをとることにする。そうすると$a_j=1$, $b_j=0$, $a_l=b_l$ $(j<l\le m)$となる。ゆえに$\eta(\bar{0}x\bar{0})>\eta(\bar{0}y\bar{0})$。

(9) 任意の$x\in T_{11}$に対して，パターンの列$P_0, P_1, \cdots, P_m$ $(m\ge 1)$が存在して，$P_0=\bar{0}x\bar{0}$，$P_i=t_{\tau_0}(P_{i+1})$ $(0\le i\le m-1)$，P_j $(0\le j\le m-1)$の核はT_{11}の元であり，かつP_mの核はT_{11}の元ではない。

（証明）　$p_0=\bar{0}\times\bar{0}$ かつ $p_i=f_{\tau_0}(p_{i+1})$ かつ p_iの核はT_{11}の元であるということが全ての $i=0,1,2,\cdots$ について成立すると仮定すると，全ての $i\geq 0$ に対して $|p_i|=|p_{i+1}|$ である。したがって，ある $i<j$ が存在して $p_i=p_j$ となる。これは(8)に矛盾する。

さらにオートマトンA, Bの直積オートマトンE（但し状態の対(A_0, B_0)の連結部分のみを考える。）を考えよう。Eの状態遷移グラフH_4は図5に示すとおりである。



H_4

図5

A, B が決定性であるから，E も決定性である。E において状態 (A_0, B_0) を初期状態とし最終状態を (A_3, B_0) として受理される Σ^k の元の集合を $T_{3,0}$，(A_0, B_0) を初期状態とし，(A_3, B_1) 及び (A_3, B_2) を最終状態として，受理される Σ^k の元の集合を $T_{3,1}$ とすると $A[3] = T_{3,0} \cup T_{3,1}$ である。明らかに，

(10) $T_{3,0} \subset B[0]$

であり，H_4 の形より $T_{3,1}$ の元で $x010y$ $(x, y \in \Sigma^*)$ の形をしているものは存在しないから，

(11) $T_{3,1} \subset D[0]$。

$\Sigma^k - \{1\} = (A[1] - \{1\}) \cup A[2] \cup A[3] = (T_{10} - \{1\}) \cup T_{11} \cup A[2] \cup T_{3,0} \cup T_{3,1}$ であり，したがって (7),(5),(2),(10),(4),(11),(6) より，

$$\Sigma^k - \{1\} \subset \alpha[\tau_2, 2] \cup T_{11} \cup \alpha[\tau_0, 1] \cup \alpha[\tau_1, 2] \cup \alpha[\tau_3, 1]$$

となる。さらに (1)(9) より，次の命題 2 を得る。

命題2　ゼロパターンを除く任意の 2 シンボル有限パターンは $\bar{0}1\bar{0}$ から $\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ によって単調に生成される。

定理2　ゼロパターンを除く $n \geq 3$ であるならば，任意の 2 シンボル有限パターンは $\bar{0}1\bar{0}$ から L_n^2 によって単調に生成される。

（謝辞） 有益な御討論を頂いた東北大工学部の丸岡氏に感謝します。

（参考文献）

1. H.Yamada and S.Amoroso A completeness problem for pattern generation in tessellation automata. J. Comput System Sci. 4 (1970)

2. 久保, 木村 テセレーションオートマタの完全性問題. 信学会研資 AL PRL 72-79 (1972-10)

3. A. Maruoka and M. Kimura A completeness problem of one dimensional tessellation automata. J. Comput. System Sci. to appear

4. 丸岡, 木村 1次元テセレーションオートマタの強連結性 信学論(D) 57-D, 2(1974)

5. Y. Kobuchi and H. Nishio, Some regular state sets in the system of one-dimensional iterative automata, Inf. Sci. 5 (1973), 199-216

6. 那須, 本多 1次元有限様相上の全単射を実現するテセレーションオートマトンに関する一考察 信学会研資 AL 73-60 (1973-11)