数理解析研究所講究録
第213巻 1974年 84-103

コード事象の性質と正規事象上の単射準同型の性質

東北大 電通研 橋口攻三郎
本多 波雄

1. はしがき

[1]において McNaughton-Papert は，一つの興味ある例として，$(w_1 \cup \cdots \cup w_n)^*$，ここで $w_i \in \Sigma^+$，の形の正規事象（彼らはコード事象と呼んだ）の性質を調べた。彼らは事象 w^* が，それぞれ，ノンカウンテング，ローカリテスタブルであるための条件を求め，また，ローカリパーザブルの概念を定義しいくつかの他のコード事象の性質を明らかにした。彼らはつぎの未解決の問題を提起した：Rをコード事象とする．Q1．Rがノンカウンテングであるための条件は何か．Q2．Rがローカリテスタブルであるための条件は何か．Q3．Rが単義かつローカリテスタブルならばRはローカリパーザブルか．

本論文においては，まず，これらの問題に対する一つの解（Q3に対しては肯定解）を与える．つぎに上の問題に関連して，単射準同型 $f: \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ がノンカウンテング事象，ローカ

リテスタブル事象そしてストリクトリテスタブル事象を，それぞれ，保存するための条件が，コード事象 $f(\Sigma_1^*)$ が，それぞれ，ノンカウンテング，ローカリテスタブルそしてストリクトリテスタブルであるための条件に帰着されることを示す．最後に，f が正規事象のスターハイトを保存するための必要条件と十分条件を求める．

2．記法と定義

Σを有限アルファベットとする．Σ^*はΣの上のすべての語の集合を表わし，λは空語，Σ^+はΣの上の空語を除くすべての語の集合を表わす．正規演算を $\cup, \cap, \bar{\ }, \cdot, *$ によって表わす．$w \in \Sigma^*$に対して $|w|$ はwの長さを表わし，集合Qに対して $\#Q$は，Qの濃度を表わす．ϕは空事象を表わす．$A = \langle \Sigma, Q, M, S, F \rangle$は$\Sigma$の上のオートマトン（有限）を表わし，ここで，$Q$は状態の有限集合，$M$は遷移関数 $M: Q \times \Sigma^* \to Q$，$S \subseteq Q$は初期状態の集合，$F \subseteq Q$は最終状態の集合，である．"$A \Leftrightarrow B$"によって，"$A$が成立するときかつそのときに限り$B$が成立する"ことを表わす．

つぎに，いくつかの基本的定義を[1]に基づいて与える．

［定義2.1］ $R \subseteq \Sigma^*$が正規事象であり，かつ，ある$k \geq 0$ が存在して，任意の $x, y, z \in \Sigma^*$に対して，$xy^kz \in R \Leftrightarrow xy^{k+1}z$

$\in R$ が成立するとき，Rはノンカウンティング（以下 n.c. と略す）である．n.c.事象の族を NC によって表わす．

〔定義2.2〕．$k \geq 1$ と k 以上の長さをもつ $w \in \Sigma^*$ に対して，$L_k(w)$，$R_k(w)$，$I_k(w)$，そして $T_k(w)$ をつぎのように定義する：

$L_k(w)=w$ の長さ k の接頭辞，$R_k(w)=w$ の長さ k の接尾辞

$I_k(w)=\{y \in \Sigma^* \mid |y|=k$ かつある $x, z \neq \lambda$ に対して $w=xyz\}$

$T_k(w)=\langle L_k(w), I_k(w), R_k(w)\rangle$．

〔定義2.3〕．$R \subseteq \Sigma^*$ に対してある $k \geq 1$ が存在して，k 以上の長さの任意の $w, w' \in \Sigma^*$ に対して，$T_k(w)=T_k(w')$ ならば，$w \in R \Leftrightarrow w' \in R$ が成立するとき，Rは k-テスタブル（以下 k-t. と略す）である．Rがある k に対して k-t.ならば，Rはローカリテスタブル（以下 l.t. と略す）である．l.t.事象の族を，LT によって表わす．

〔定義2.4〕．$R \subseteq \Sigma^*$ に対してある $k \geq 1$ と $\alpha, \beta, \gamma \subseteq \Sigma^k$ が存在して，k 以上の長さの任意の $w \in \Sigma^*$ に対して，$w \in R \Leftrightarrow L_k(w) \in \alpha$，$I_k(w) \subseteq \beta$，かつ，$R_k(w) \in \gamma$ が成立するとき，Rはストリクトリ k-テスタブル（以下 k-s.t. と略す）である．Rがある k に対して k-s.t.ならば，Rはストリクトリテスタブル（以下 s.l.t. と略す）である．s.l.t.事象の族を SLT によって表わす．

$R \subseteq \Sigma^*$ が k-s.t. ならば，Rは k-t. である（〔7〕）．つぎの

ことが知られている([17])：SLTはブール演算で閉じていない．SLTのブール演算による閉包がLTである．LTはコンカテネーションで閉じず，ブール演算とコンカテネーションによるLTの閉包がNCである．

［定義2.5］．$R=(w_1\cup\cdots\cup w_n)^*$ において，任意の $w\in R$ に対して，$w=w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_p}=w_{j_1}w_{j_2}\cdots w_{j_r}$ $(p, r\geqq 1)$ ならば，$p=r$ かつ $i_\ell=j_\ell$ $(1\leqq \ell\leqq p)$ が成立するとき，Rは単義(unambiguous)である．単義でないコード事象は多義(ambiguous)である．

例：$(10\cup 01)^*$ 単義，　$(00\cup 000)^*$ 多義．

記法1．コード事象を正規表現 $(w_1\cup\cdots\cup w_n)^*$ によって表わすとき，表現 $(w_1\cup\cdots\cup w_n)^*$ はつぎの意味で既約であるとする：任意の i $(1\leqq i\leqq n)$ に対して，$w_i\notin((w_1\cup\cdots\cup w_n)-w_i)^*$.

記法2．コード事象Rと $w\in R$ に対して，$w\overset{R}{=}w_0-w_1$ によって，$w_0, w_1\in R$ を意味する．特にRが明らかなとき，$w=w_0-w_1$ と書く．

McNaughton-Papertは，ローカリパーザブルの概念を単義コード事象に対して定義したが，この概念を，単義の制限を除くことにより，一般のコード事象へ拡張する．

［定義2.6］．$k\geqq 1$ とする．$w\in\Sigma^*$ に対して $P_k(w)$ と $S_k(w)$ をつぎのように定義する：(1). $|w|\geqq k$ のとき $P_k(w)=L_k(w)$, $S_k(w)$

$= R_k(w)$. (2). $|w| < k$ のとき, $P_k(w) = S_k(w) = w$.

[定義2.7]. コード事象 R に対してある $k \geq 1$ が存在して, 任意の $w \in R$ と w の任意の分解 $w = v_1 v_2$ に対して ($v_1, v_2 \in \Sigma^*$), $S_k(v_1)$ と $P_k(v_2)$ を知ることにより, $v_1, v_2 \in R$ か否かを決定できるとき, R は k-パーザブル(以下 k-p. と略す)である. R がある k に対して k-p. であるとき, R はローカリパーザブル(以下 l.p. と略す)である.

例: $(10101 \cup 1001)^*$ は 1-p.

3. コード事象の分類

McNaughton-Papert は, つぎの三つの定理を証明した([1]).

[定理1]. 事象 w^*, $w \in \Sigma^+$, において, ある $v \in \Sigma^+$ と $m \geq 2$ に対して, $w = v^m$ ならば, $w^* \notin NC$. 任意の $v \in \Sigma^*$ と $m \geq 2$ に対して $w \neq v^m$ ならば, $w^* \in LT$.

[定理2]. 単義コード事象 $(w_1 \cup \cdots \cup w_n)^*$ が k-p. ならば, $(w_1 \cup \cdots \cup w_n)^*$ は $(2p + 2k - 1)$-t. である, ここで $p = \max\{|w_i|\}$.

[定理3]. 事象 $(w_1 \cup \cdots \cup w_n)^*$ が, l.t. であり, かつ, つぎの(1)または(2)を満すならば, 事象 $(w_1 \cup \cdots \cup w_n)^*$ は l.p. である:

(1). 任意の $w_i \neq w_j$, $1 \leq i, j \leq n$, に対して, w_i は w_j の接頭辞でない. (2). 任意の $w_i \neq w_j$, $1 \leq i, j \leq n$, に対して, w_i は w_j の接尾辞でない.

この節において我々は，上記の定理の一つの一般化を得るが，これらは問題Q1, Q2, Q3に対する解を与える．まず，コード事象の二つの性質を述べる．

［定理3.1］．$R \subseteq \Sigma^*$がコード事象であるための条件は，$R = R^*$，かつ，事象 $R-(R-\lambda)^2$が有限であることである．

証明．$R=(w_1 \cup \cdots \cup w_n)^*$ ならば，$R = R^*$，かつ，$R-(R-\lambda)^2 = (\lambda \cup w_1 \cup \cdots \cup w_n)$．逆に，$R=R^*$，かつ，$R-(R-\lambda)^2=(\lambda \cup w_1 \cup \cdots \cup w_n)$ とする．$R'=(w_1 \cup \cdots \cup w_n)^*$ とおく．$R=R^* \supseteq (w_1 \cup \cdots \cup w_n)^* = R'$．$w \in R$とする．$w=\lambda$ならば，$w \in R'$．$w \neq \lambda$ ならば，$H(w) = \max\{l_i \mid w = w_{i_1} \cdots w_{i_{l_i}}, w_{i_j} \in R-\lambda\}$ とおく．$H(w)$に関する帰納法で$w \in R$を証明できる．（証明終）．

定理3.1は，任意の正規事象Rに対して，Rがコード事象であるか否かを決定するための，アルゴリズムを与える．

［定理3.2］．コード事象Rが単義であるための条件は，任意の$x, y, z \in \Sigma^*$に対して，$x, xy, yz, z \in R$ ならば $y \in R$ が成立することである．

証明．$x, xy, yz, z \in R$ かつ $y \notin R$ ならば，$xyz \in R$は，$xy-z$, $x-yz$という二通りの分解をもつ．逆に，Rが多義ならば，ある$w \in R$ が存在して，wは二通りの分解をもつ：$w = xy-z$ と $w = x-yz$．このとき，$x, xy, yz, z \in R$ かつ $y \notin R$．

定理3.2は，つぎのアルゴリズムを与える：　Rをコード事

象とする．$R\backslash R \cap R/R \cap \overline{R} = \phi \Leftrightarrow R$ は単義である．ただし，$R\backslash R = \{x \mid$ ある $y \in R$ に対して $yx \in R\}$，$R/R = \{x \mid$ ある $y \in R$ に対して $xy \in R\}$．（R を受理するオートマトン $A = \langle \Sigma, Q, \delta, S, F \rangle$ に対して $A' = \langle \Sigma, Q, \delta, F, F \rangle$ により $R\backslash R$ は受理される）．

つぎに，コード事象が n.c. であるための条件を求める．

［定義3.1］正規事象 R に対して，ある $v \in \Sigma^+$，$l \geqq 0$，$m \geqq 2$ が存在して，任意の $i \geqq l$ に対して，$v^i \in R \Leftrightarrow i \equiv 0 \pmod{m}$ が成立するとき，R は一般巡回語 v をもつという．特に，$l=0$ のとき，巡回語 v をもつという．

注意．R の既約オートマトンの状態数を $\#Q$ により表わすならば，上の定義の l を $\#Q$ で置き換えることができる．

［定義3.2］正規事象 R に対して，ある $v \in \Sigma^+$，$m \geqq 2$ が存在して，$v \notin R$，かつ，$v^m \in R$ が成立するとき，R は巡回語 v をもつという．

［定理3.3］（Schützenberger [1]参照）．正規事象 R が n.c. でないための条件は，ある $x, y, z \in \Sigma^*$ と $m \geqq 2$ が存在して，$x(y^m)^*z \subseteq R$，かつ，$x(y^m)^*yz \cap R = \phi$ が成立することである．

証明．必要性．$R \notin NC$ そして $A = \langle \Sigma, Q, \delta, s_1, F \rangle$ を R の既約オートマトンとする．ある $y \in \Sigma^*$ と $m \geqq 2$ 個の状態 $q_0, q_1, \cdots, q_{m-1}$ が存在して，$\delta(q_0, y^i) = q_i$ $(0 \leqq i < m)$ かつ $\delta(q_0, y^m) = q_0$（[1]）．R_i を $A_i = \langle \Sigma, Q, \delta, q_i, F \rangle$ で受理される事

象とする．系列$(R_0, R_1, \cdots, R_{m-1}, R_0)$を考えれば，$q_{i_0}, q_{i_1} \in Q$が存在して，$\delta(q_{i_0}, y) = q_{i_1}$ かつ $R_{i_0} - R_{i_1} \neq \phi$ が成立することを知る．$z \in R_{i_0} - R_{i_1}$，$\delta(s_1, x) = q_{i_0}$ とする．任意の$j \geqq 0$に対して，$\delta(s_1, xy^{mj}z) \in F$，かつ，$\delta(s_1, xy^{mj+1}z) \notin F$． 十分性．$x(y^m)^*z \subseteq R$ かつ $x(y^m)^*yz \cap R = \phi$ ならば，任意の$k \geqq 0$に対して，$x(y^m)^{k+1}z = xy^{mk+m-k} \cdot y^k z \in R$ かつ $xy^{mk+m-k} \cdot y^{k+1}z = xy^{m(k+1)}yz \notin R$．ゆえに $R \notin NC$．(証明終)

定理3.3を利用して，コード事象に対する条件を求める．

[定理3.4] コード事象Rが n.c であるための条件は，Rが一般巡回語をもたないことである．

証明．必要性．定理3.3より明らか．十分性．$R \notin NC$ とする．定理3.3より，$x, y, z \in \Sigma^*$ と $m \geqq 2$ が存在して，$x(y^m)^*z \subseteq R$ かつ $x(y^m)^*yz \cap R = \phi$．十分大きな整数kに対して，$w = xy^{km}z$ とおく．wは，$w = xy^{m_0}y_0 - y_1y^{m_1}y_0 - y_1y^{m_2}z$ という分解をもつ，ここで，$y = y_0y_1$．$v = y_1y_0$，$P = m(m_1+1)$ $(\geqq 2)$とおく．$v^{m_1+1} = (y_1y_0)^{m_1+1}$ より，任意の$i \geqq 0$に対して，$v^{Pi} \in R$．ある$i \geqq 0$に対して $v^{Pi+1} \in R$とすれば，$v^{(Pi+1)(m_1+2)} \in R$．ところが，$xy^{m_0}y_0(y_1y_0)^{(Pi+1)(m_1+2)}y_1y^{m_2}z \in R$，$m_0 + (Pi+1)(m_1+2) + m_2 + 1 \equiv 1 \pmod{m}$，これは矛盾．よって，$(v^P)^*v \cap R = \phi$．Rの既約オートマトンを $A = \langle \Sigma, Q, \delta, s_1, F \rangle$とする．ある $t \geqq 0$，$l \geqq 1$ が存在して，$\delta(s_1, v^{Pt}) = \delta(s_1, v^{P(t+l)})$．$0 \leqq i \leqq l$に対して，$R_i$

$=\{x \mid v^{p(t+i)}x \in R\}$ とおく．$R=R^*$ と $R_0=R_\ell$ より，$R_0=R_1$ を容易に証明できる．よって，$\delta(s_1, v^{p(t+1)})=\delta(s_1, v^{pt})\ (\in F)$．$q_j=\delta(s_1, v^{pt+j})\ (0\leqq j<p)$ とおく．$r=\min\{j>0 \mid q_j\in F$ または $j=p\}$ とおく．$\delta(s_1, v^{pt+1})\notin F$ より $r\geqq 2$．任意の $i \geqq pt$ に対して，$v^i\in R \Leftrightarrow i\equiv 0 \pmod r$ を証明する．$p=p_0r+r_p\ (0\leqq r_p<r)$ とおけば，$v^{(pt+r)(p_0+1)}\in R$，$(pt+r)(p_0+1)\equiv p_0r+r\equiv r-r_p \pmod p$，よって $r_p=0$．任意の $q_j\in F$ $(0<j<p)$ に対して，同様に $j\equiv 0\pmod r$ を証明できる．また，任意の $j\equiv 0 \pmod r$ $(0<j<p)$ に対して，$q_j\in F$ を証明できる．ゆえに，v は R の一般巡回語である．(証明終)

例：$(0^4\cup 0^6)^*\notin NC$．($v=0$, $\ell=4$, $m=2$ とおく)．

例：$(00)^*\cup(000)^*$, $(1\cup 00)^*(000)^*$, $1(00)^*$ は，いずれも n.c. でないが，一般巡回語をもたない．

二つの系として，単義コード事象が n.c. であるための条件を与える．

〔系3.1〕．単義コード事象 R が n.c. であるための条件は，R が巡回語をもたないことである．

証明．必要性．定理3.3より明らか．十分性．$R\notin NC$ とする．定理3.4より，$v\in\Sigma^*$, $\ell\geqq 0$, $m\geqq 2$ が存在して，任意の $i\geqq \ell$ に対して $x^i\in R\Leftrightarrow i\equiv 0\pmod m$．$x^i\in R$，$i\geqq 0$，とすれば，$x^{m\ell+i}\in R$．$m\ell+i\equiv 0\pmod m$．$i\equiv 0\pmod m$．逆に，$i$

$=km$, $k\geq 0$，とする．$k\neq 0$ ならば，$x^{(l+k)m}=x^{lm}\cdot x^{km}=x^{km}\cdot x^{lm}$ $\in R$ かつ $x^{lm}\in R$．定理3.2より $x^{km}\in R$．（証明終）

[系3.2] 単義コード事象 R が n.c. であるための条件は，R が疑巡回語をもたないことである．

証明．十分性．定理3.4より明らか．必要性．$x\in\Sigma^*$, $m\geq 2$, $k\geq 0$ が存在して，$x\notin R$, $x^m\in R$ かつ任意の $x', y', z'\in\Sigma^*$ に対して，$x'y'^kz'\in R\Leftrightarrow x'y'^{k+1}z'\in R$．$x^{km}\in R$ より $x^{km+1}=x^{k(m-1)}\cdot x^{k+1}$ $\in R$．すると $x^{km+1}=x^{km}\cdot x=x^{km}\cdot x$．定理3.2より $x\in R$，矛盾．（証明終）

例：$(010\cup 101)^*\notin NC$．（$01\notin R$ かつ $010101\in R$）

例：$(01\cup 10\cup 11)^*\notin NC$．（$01011\notin R$ かつ $0101101011\in R$）

例：$(01\cup 10)^*\in NC$．（単義であり疑巡回語をもたない）

注意．n.c. であるが疑巡回語をもつ多義コード事象が存在する：$(00\cup 000)^*$，（$x=0$, $m=2$ とおけば，x は疑巡回語）

つぎに，コード事象が l.p. であるための条件を求めるが，この条件は s.l.t. であるための条件であることを後で示す．

[定理3.5] コード事象 R が l.p. でないための条件は，ある x, $y\in\Sigma^*$ が存在して，xy, $yx\in R$ かつ $x(yx)^*\cap R=\phi$ が成立することである．

証明．十分性．R が k-l.p. でありかつ xy, $yx\in R$, $x(yx)^*\cap R=\phi$ とする．$w=v_1v_2$, $v_1=x(yx)^k$, $v_2=(yx)^ky$, $w'=v_1'v_2'$, $v_1'=v_2'=(yx)^k$ とおく．$w, w', v_1', v_2'\in R$, $R_k(v_1)=R_k(v_1')$, $L_k(v_2)$

$=L_k(v_2')$ かつ R が k-P. であるから $v_1 \in R$, 矛盾. 必要性. $R=(w_1 \cup \cdots \cup w_n)^*$ とし R が l.P. でないとする. $k=2pn^2r+1$ とおく, ここで, $p=\max\{|w_i|\}$, $r=\#Q$, $A=\langle \Sigma, Q, \delta, s_1, F \rangle$ は, R の既約オートマトンである. R は k-P. でないから, $v_1, v_2 \in R$, $v \in \Sigma^*$ が存在して, $v=L_k(v_1)=L_k(v_2)$ または $v=R_k(v_1)=R_k(v_2)$ であり, かつ, v は $w_1, \cdots, w_n$ による, v_1 と v_2 に従った二通りの分解をもつ. $v=L_k(v_1)=L_k(v_2)$ とする ($v=R_k(v_1)=R_k(v_2)$ のとき同様に証明できる). 二通りの分解に従って v を表現して, $v=w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_s}z_1$ (分解A), $v=y_0w_{j_1}w_{j_2}\cdots w_{j_t}z_2$ (分解B), ここで, y_0 はある w_i の接尾辞, z_1, z_2 はそれぞれある w_j, w_m の接頭辞, $y_0w_{j_1}\cdots w_{j_\mu} \notin R$ $(0 \leqq \mu \leqq t)$. 三組 $(w_{i_\nu}, l, w_{j_\mu})$ の系列 W を分解Aと分解Bによりつぎのようにつくる: (1). W は三組 (w_{i_ν}, l, w_{j_1}) で始まる, ここで $\nu=\min\{m \mid |w_{i_1}\cdots w_{i_m}|>|y_0|\}$, そして $l=|y_0|-|w_{i_1}\cdots w_{i_{\nu-1}}|$. (2). 三組 $(w_{i_\nu}, l, w_{j_\mu})$ の直後に続く三組 $(w_{i_{\nu'}}, l', w_{j_{\mu'}})$ は, $\nu'=\min\{m \mid |w_{i_1}\cdots w_{i_m}|>|y_0w_{j_1}\cdots w_{j_\mu}|$ かつ $m>\nu\}$, $\mu'=\min\{m \mid |w_{i_1}\cdots w_{i_\nu}|<|y_0w_{j_1}\cdots w_{j_m}|$ かつ $m>\mu\}$, そして $l'=|y_0w_{j_1}\cdots w_{j_{\mu'-1}}|-|w_{i_1}\cdots w_{i_{\nu'-1}}|$ を満たす. W をできるだけ長くつくる. $k=2pn^2r+1$ より, ある三組 $(w_{i_\nu}, l, w_{j_\mu})$ が存在して, $(w_{i_\nu}, l, w_{j_\mu})$ は少なくとも, $(r+1)$ 回 W に現われることを知る. よって, v はつぎの二通りの分解をもつ:

$v=v_0w_{i_\nu}v_1w_{i_\nu}\cdots v_rw_{i_\nu}v_{r+1}=v_0'w_{j_\mu}v_1'w_{j_\mu}\cdots w_{j_\mu}v_r'w_{j_\mu}v_{r+1}'$, ここ

で，$|v_0' w_{j_\mu} v_1' \cdots w_{j_\mu} v_m'| - |v_0 w_{i_\nu} v_1 \cdots w_{i_\nu} v_m| = \ell \ (0 \leqq m \leqq r)$，$v_0, v_i, v_i' \in R \ (1 \leqq i \leqq r)$，$v_0' w_{j_\mu} v_1' \cdots w_{j_\mu} v_m' \notin R \ (0 \leqq m \leqq r)$．$q_m = \delta(s_1, v_0 w_{i_\nu} v_1 \cdots w_{i_\nu} v_m) \ (\in F) \ (0 \leqq m \leqq r)$とおく．ある$0 \leqq m_0 < m_1 \leqq r$が存在して$q_{m_0} = q_{m_1}$．$w = v_0 w_{i_\nu} \cdots v_{m_0}$，$v_0' = v_0 x$，$w_{i_\nu} = x x'$，かつ，$y = x' v_{m_0+1} w_{i_\nu} \cdots w_{i_\nu} v_{m_1}$とおく．$w \in R$，$xy = w_{i_\nu} v_{m_0+1} \cdots w_{i_\nu} v_{m_1} \in R$，$yx = w_{j_\mu} v_{m_0+1}' \cdots w_{j_\mu} v_{m_1}' \in R$．そして$\delta(s_1, wx(yx)^*) = \{\delta(s_1, wx)\}$すなわち，$x(yx)^* \cap R = \phi$．（証明終）

上の証明より，つぎのアルゴリズムを得る：$R = (w_1 \cup \cdots \cup w_n)^*$とする．$\alpha = \{x \mid x$はある$w_i, 1 \leqq i \leqq n,$の接頭辞$\}$とおく．$R$が$\ell.P. \Leftrightarrow R\alpha \cap \alpha R \cap \overline{R}$は無限事象．

〔定理3.6〕コード事象Rが$s.\ell.t.$であるための条件は，Rが$\ell.P.$であることである．

証明．つぎの二つの補題を証明すれば十分である．

（補題3.1）事象$(w_1 \cup \cdots \cup w_n)^*$が$k$-$P.$ならば，事象$(w_1 \cup \cdots \cup w_n)^*$は$(2k+p)$-$s.t.$である，ここで，$p = \max\{|w_i|\}$．

証明．$R = (w_1 \cup \cdots \cup w_n)^*$そして$m = 2k+p$とおく．$\alpha = \{x \mid$ある$y \in R$に対して$x = L_m(y)\}$，$\gamma = \{x \mid$ある$y \in R$に対して$x = R_m(y)\}$そして$\beta = \{x \mid$ある$y \in R$に対して$x \in I_m(y)\}$とおく．長さ$m$以上の任意の$w \in \Sigma^*$に対して，$w \in R \Leftrightarrow L_m(w) \in \alpha, I_m(w) \subseteq \beta$かつ$R_m(w) \in \gamma$であることを証明する．$w$を$m$以上の長さの任意の語とする．$w \in R$なら定義より$L_m(w) \in \alpha, I_m(w) \subseteq \beta$かつ

$R_m(w)\in\gamma$. 逆に $L_m(w)\in\alpha$, $I_m(w)\subseteq\beta$ かつ $R_m(w)\in\gamma$ とする. $|w|\geqq m+2$ の場合の証明を与えるが, $|w|=m$ または $m+1$ の場合同様に証明できる. $w=xa_1a_2z=b_1x'a_2z=w'a_3$ とおく, ここで, $|x|=|x'|=m$, かつ $a_1, a_2, b_1, a_3\in\Sigma$. w を $w_1,\cdots,w_n$ で左から分解する. ある $v\in R$ に対して, $x=L_m(w)=L_m(v)$. $v=xv_1$ とおく. v に従った x の分解 $x=x_0x_1$ が存在して, $x_0, x_1v_1\in R$, $k<|x_0|\leqq k+p$ かつ $k\leqq|x_1|<p+k$. ある $v'\in R$ に対して $x'\in I_m(v')$. $v'=v_0'x'v_1'$ かつ $x_0=b_1z_0$ とおけば, $v'=v_0'z_0x_1a_1v_1'$. $R_k(v_0'z_0)=R_k(x_0)$, $L_k(x_1a_1v_1')=L_k(x_1v_1)$ かつ $v'\in R$. R が k-p. であるから, $v_0'z_0, x_1a_1v_1'\in R$. よって, b_1x' の分解 $b_1x'=x_0'x_1'$ が存在して, $x_0', x_1'v_1'\in R$, $k+1<|x_0'|\leqq k+p+1$ かつ $k\leqq|x_1'|<p+k$. この操作を繰り返して, w' の分解 $w'=w_0'w_1'$ を得る, ここで, $w_0'\in R$, ある $z'\in\Sigma^*$ に対して $w_1'z'\in R$, かつ $k\leqq|w_1'|<p+k$. $y=R_m(w)$ とおく. ある $v''\in R$ に対して $y=R_m(v'')$. $v''=v_0''y=v_0''z_0''w_1'a_3$ とおく. 前と同様にして, $v_0''z_0''$, $w_1'a_3\in R$. ゆえに $w\in R$. (証明終).

(補題3.2) コード事象 R が s.t. ならば, R は l.p. である.

証明. R が m-s.t., $m\geqq1$, でかつ l.p. でないとする. 定理3.5より ある $x, y\in\Sigma^*$ が存在して, $xy, yx\in R$ かつ $x(yx)^*\cap R=\phi$. $w=x(yx)^m$ とおく. $L_m(w)=L_m((xy)^m)$, $I_m(w)\subseteq I_m((xy)^{m+1})$, $R_m(w)=R_m((yx)^m)$, かつ $(xy)^m$, $(xy)^{m+1}$, $(yx)^m\in R$. R が m-s.t. であるから $w\in R$, 矛盾. (証明終)

注意 補題3.1は定理2を包含する.

[定理3.7] 単義コード事象 R に対して, つぎの三つの命題は等価である: (1). $R \in LT$ (2). $R \in SLT$ (3) R は l.P.

証明 (1)⇒(3)を証明すれば十分である. R が k-t でありかつ l.P. でないとする. 定理3.3より $x, y \in \Sigma^*$ が存在して, $xy, yx \in R$ かつ $x(yx)^* \cap R = \phi$. $v_1 = (xy)^k (yx)^k (xy)^k$, $v_2 = (xy)^k (yx)^k (xy)^k x (xy)^k$ かつ $v_3 = (xy)^k x (xy)^k (yx)^k (xy)^k$ とおく, $T_k(v_1) = T_k(v_2) = T_k(v_3)$ と $v_1 \in R$ より $v_2, v_3 \in R$. v_2, v_3 と定理3.2より $(xy)^k x (xy)^k = x(yx)^k (xy)^k \in R$. 同様に, $(yx)^k (xy)^k x \in R$. これらと定理3.2より, $x \in R$, 矛盾. (証明終)

定理3.7は Q3 に対して肯定解を与える.

注意. l.t. であるが s.l.t. でない多義コード事象が存在する: $R = (10 \cup 01 \cup 00 \cup 11 \cup 000 \cup 111 \cup 001 \cup 110 \cup 011 \cup 100)^*$ とおく. $\overline{R} = 0(10)^* \cup 1(01)^*$. $T_2(\overline{R}) = \{T_2(w) \mid w \in \overline{R}\}$ とおけば, $T_2(\overline{R}) = \{\langle 01, \phi, 10\rangle, \langle 10, \phi, 01\rangle, \langle 01, \{10, 01\}, 10\rangle, \langle 10, \{01, 10\}, 01\rangle\}$. そして任意の $w \in \Sigma^*$, $|w| \geqq 2$, に対して $w \in \overline{R} \Leftrightarrow T_2(w) \in T_2(\overline{R})$. よって, $\overline{R}$, R は 2-t. $k = 3$ が R は l.P. でない. したがって R は s.l.t. でない.

McNaughton と Zalcstein はつぎの定理を証明した([12]). (ただしここでは半群の命題を語の命題に言い換えた).

[定理4] $R \subseteq \Sigma^+$ が l.t. であるための条件はある $w_1, e, v, w, w_2 \in \Sigma^*$ が存在してつぎの命題中, 一つが成立することである:

(a). $w_1ee^*vee^*w_2 \subseteq R$ かつ $w_1ee^*vee^*vee^*w_2 \cap R = \phi$.

(b). $w_1ee^*vee^*w_2 \cap R = \phi$ かつ $w_1ee^*vee^*vee^*w_2 \subseteq R$

(c). $w_1ee^*vee^*wee^*w_2 \subseteq R$ かつ $w_1ee^*wee^*vee^*w_2 \cap R = \phi$.

この定理より，コード事象に対する条件をつぎの定理のように得る．証明は省略するがその概略は：十分性は明らか．必要性は，定理4の(a),(b),(c)より，それぞれ定理3.8の(1),(2)または(3)，そして(4)または(5)，が成立することを，定理3.4の証明と同様な方法により証明される．

[定理3.8]．コード事象Rがl.t.でないための条件は，$x,y,z,v,w,\in\Sigma^*$が存在してつぎの命題中，一つが成立することである：

(1). $xy, yx, v \in R$ かつ $(xy)^*v(yx)^*yv(yx)^* \cap R = \phi$.

つぎの(2)〜(5)において，$xyz, yzx, zxy, v, w \in R$ とする：

(2). $(xyz)^*v(yzx)^*yzvy(zxy)^* \subseteq R$ かつ $(xyz)^*vy(zxy)^* \cap R = \phi$.

(3). $(xyz)^*v(zxy)^*zvzx(yzx)^* \subseteq R$ かつ $(xyz)^*vzx(yzx)^* \cap R = \phi$

(4). $(xyz)^*xv(zxy)^*zw(yzx)^*y \cap R = \phi$.

(5). $(xyz)^*xyv(yzx)^*yzw(zxy)^*zx \cap R = \phi$.

注意．上の(1)〜(5)の各条件は，ある$x', y' \in \Sigma^*$が存在して，$x'y', y'x' \in R$ かつ $x'(y'x')^* \cap R = \phi$ が成立することを保証する．

4．NC, LT, SLT をそれぞれ保存する単射準同型

以後"f"により，"単射準同型$f: \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$"を表わす．

［定義4.1］ f がつぎの(1),(2),(3) を満たすとき，f はそれぞれNC, LT, SLTを保存するという：(1). 任意の $R \subseteq \Sigma_1^*$ に対して，$R \in NC \Leftrightarrow f(R) \in NC$. (2). 任意の $R \subseteq \Sigma_1^*$ に対して，$R \in LT \Leftrightarrow f(R) \in LT$. (3). 任意の $R \subseteq \Sigma_1^*$ に対して，$R \in SLT \Leftrightarrow f(R) \in SLT$.

［定理4.1］ 任意の $R \subseteq \Sigma_1^*$ に対して，つぎの命題が成立する：
(1) $R \notin NC$ ならば $f(R) \notin NC$. (2). $R \notin LT$ ならば $f(R) \notin LT$.
(3). $R \notin SLT$ ならば $f(R) \notin SLT$.

証明は省略するが，(3) の場合，$f(R)$ が k-s.t. ならば R は $(k+2)$-s.t. であることを証明できる．

つぎの定理は，Σ の上の n.c. 事象の族は，$a_i \in \Sigma$ と λ を含みブール演算とコンカテネーションで閉じた最小の族である（[1] 参照）ことから，証明される．

［定理4.2］ f がNCを保存するための条件は $f(\Sigma_1^*) \in NC$ が成立することである．

［定理4.3］ f がSLTを保存するための条件は $f(\Sigma_1^*) \in SLT$ が成立することである．

証明．必要性は明らか．十分性．$f(\Sigma_1^*) \in SLT$ とする．定理3.6より $f(\Sigma_1^*)$ はある $k \geq 1$ に対して k-p.. 定理4.1より $R \in SLT$ ならば $f(R) \in SLT$ を証明すれば十分．$\alpha, \beta, \gamma \subseteq \Sigma_1^l$ が存在して任意の $w \in \Sigma_1^*$, $|w| \geq l$, に対して $w \in R \Leftrightarrow L_l(w) \in \alpha$, $I_l(w) \subseteq \beta$, かつ $R_l(w) \in \gamma$ とする．$m = 2k + lp$ とおく，ここで，$p = \max\{|w_i| \mid w_i \in f(\Sigma_1)\}$. α'

$=\{x \mid x=L_m(y),\ y\in f(R)\}$, $\beta'=\{x\mid x\in I_m(y),\ y\in f(R)\}$ として $\gamma'=\{x\mid x=R_m(y),\ y\in f(R)\}$ とおく．$w\in\Sigma_2^*$, $|w|\ge m$ とする．$w\in f(R)$ ならば $L_m(w)\in\alpha'$, $I_m(w)\subseteq\beta'$ かつ $R_m(w)\in\gamma'$．逆に $L_m(w)\in\alpha'$, $I_m(w)\subseteq\beta'$, $R_m(w)\in\gamma'$ とする．補題3.1の証明と同様にしてある $v\in\Sigma_1^*$ に対して $w=f(v)$ を証明できる．$v=L_\ell(v)\cdot v_0$ とおく．ある $y\in f(R)$ に対して $L_m(w)=L_m(y)$．$y=f(L_\ell(v))y_0$ とおく．$L_k(y_0)=L_k(f(v_0))$, $f(\Sigma_1^*)$ は k-p. として $f(L_\ell(v)), f(v_0)\in f(\Sigma_1^*)$ より，$y_0\in f(\Sigma_1^*)$．よって $L_\ell(v)\in\alpha$. 同様に $R_\ell(v)\in\gamma$．$x\in I_\ell(v)$ かつ $v=v_0xv_1$ とする．三つの場合に分ける．(1). $|f(v_0)|\ge k$ かつ $|f(v_1)|\ge k$ の場合．ある $y'\in f(R)$, $z_0, z_0', z_1, z_1'\in\Sigma_2^*$ が存在して，$z_0f(x)z_1\in I_m(y')$, $w=z_0'z_0f(x)z_1z_1'$ かつ $|z_0|, |z_1|\ge k$．$y=y_0'z_0f(x)z_1y_1'$ とおく．上と同様にして，$y_0'z_0, z_1y_1'\in f(\Sigma_1^*)$. よって $x\in\beta$．(2). $|f(v_0)|<k$ の場合．$|f(v_0x)|<k+\ell p$．$L_m(w)=L_m(y)$ かつ $y\in f(R)$．$y=f(v_0x)y_2$ とおく．$L_k(y_2)=L_k(f(v_1))$．上と同様にして $y_2\in f(\Sigma_1^*)$．よって $x\in\beta$．(3). $|f(v_1)|<k$ の場合．(2) と同様にして $x\in\beta$．よって $v\in R$．ゆえに $w\in f(R)$．（証明終）

つぎの定理は，Σ の上の l.t. 事象の族は，Σ の上の s.l.t. 事象の族のブール演算による閉包であることから証明される．

〔定理4.4〕 f が SLT を保存するならば f は LT を保存する．

〔系4.1〕 f に対して，つぎの命題は等価である：

(1). $f(\Sigma_1^*)\in LT$. (2). $f(\Sigma_1^*)\in SLT$. (3). $f(\Sigma_1^*)$ は l.p. (4). f は LT を保存する． (5). f は SLT を保存する．

定理4.2と系4.5は，fが，それぞれ，NC，LT (SLT)を保存するか否かを決定するアルゴリズムを与える．

5．スターハイトを保存する単射準同型

fが正規事象のスターハイト（以下s.h.と略す）を保存するための必要条件と十分条件を求める．この節では“正規表現”は$\cup, \cdot, *$のみで表わされているとし，$\langle E\rangle$により正規表現Eをもつ正規事象を表わす．$h_e(E)$により正規表現Eのs.h.を表わし，$h(R)$により正規事象Rのs.h.を表わす．Σ_1の上の任意の正規事象Rに対して，$h(R)=h(f(R))$が成立するとき，fはs.h.を保存するという．McNaughtonはつぎの定理を証明した([3])．

［定理5］．$\Sigma_1=\{a_1,\cdots,a_p\}$，$\Sigma_2=\{0,1\}$とする．$f_1(a_i)=10^i10^{p-i+1}1$，$f_2(a_i)=0^i1^{p-i+1}$，$f_3(a_i)=01^i$，そして$f_4(a_i)=01^i0$とする$(1\leqq i\leqq p)$．$f_1$と$f_2$はs.h.を保存するが，$f_3$と$f_4$のいずれもs.h.を保存しない．

つぎに，この定理に対する一つの一般化を求める．

［定義5.1］．$xy, xy', x'y, x'y'\in f(\Sigma_1)$，$x\neq x'$かつ$y\neq y'$を満たす$x, y, x', y'\in\Sigma_2^+$が存在しないとき，$f$は非交差性をもつという．

［定義5.2］．$w_i\neq w_j$である任意の$w_i, w_j\in f(\Sigma_1)$に対して，w_iがw_jの接頭辞でも接尾辞でもないとき，fはPS-性をもつという．

［定義5.3］．$P(f)=\{x\mid$ある$y\in\Sigma^+$と$w_i\in f(\Sigma_1)$に対して$w_i=xy\}$，そして$S(f)=\{x\mid$ある$y\in\Sigma^*$と$w_i\in f(\Sigma_1)$に対して$w_i=yx\}$とおく．$R\subseteq\Sigma_2^*$を正

規事象とする．$v_1 R v_2 \subseteq f(\Sigma_1^*)$を満たす任意の$v_1, v_2 \in \Sigma_2^*$に対して，つぎの(1)，または(2)が成立するときRはTAG-性をもつという：

(1) ある$y \in S(f)$が存在して，任意の$w \in R-\{\lambda\}$に対して$v, x \in \Sigma_2^*$が存在して$w = yvx$, $x \in P(f)$, $v_1 y, v, x v_2 \in f(\Sigma_1^*)$かつ$xy \in f(\Sigma_1)$.

(2). ある$x \in P(f)$が存在して，任意の$w \in R-\{\lambda\}$に対して$v, y \in \Sigma_2^*$が存在して$w = yvx$, $y \in S(f)$, $v_1 y, v, x v_2 \in f(\Sigma_1^*)$かつ$xy \in f(\Sigma_1)$.

(1)，(2)の場合，Rは(v_1, v_2)に関して，それぞれ，前タッグyと後タッグxをもつという．$T(R, v_1, v_2)$により(1)または(2)の条件を満たすx, yの対(x, y)の集合を表わす．($T(R, v_1, v_2)$は有限集合)

〔定理5.1〕. fがs.h.を保存するならばfは非交差性をもつ．

証明．$xy, x'y, xy', x'y' \in f(\Sigma_1)$, $x \neq x'$かつ$y \neq y'$とする．$xy \neq x'y'$と仮定できる．$R = x(yx \cup y'x')^* y$とおく．$R \subseteq f(\Sigma_1^*)$かつ$h(R) = 1$．Eを$f^{-1}(R)$の任意の正規表現とする．Eに現われる記号と文字の個数をrとする．$v_1 = f^{-1}((xy)^{2r})$, $v_2 = f^{-1}(xy'(x'y')^{2r}x'y)$, $v_3 = f^{-1}((xy)^{2r}xy'(x'y')^{2r}x'y)^r)$とおく．$v_1, v_2, v_3 \in f^{-1}(R)$．$v_1, v_2$よりEが$E_0 = (f^{-1}((xy)^{\ell}) \cup E_1)^*$, $E_0' = (f^{-1}((x'y')^{\ell'}) \cup E_1')^*$の形の部分表現をもつことを知る．このような$E_0, E_0'$の形のすべての部分表現の集合をそれぞれA, Bとすれば，$A \cap B = \phi$．v_3とこれより$h_a(E) \geq 2$．よって$h(f^{-1}(R)) \geq 2$．（証明終）

$\langle E \rangle \subseteq f(\Sigma_1^*)$かつ$f^{-1}(\langle E \rangle)$の正規表現を，$a_i \in \Sigma_1$に対してEの$f(a_i)$を$a_i$で置き換えて得られるとき，正規表現Eを標準形という．

〔定理5.2〕. fが非交差性とPS-性をもてば，fはs.h.を保存する．

証明．$h(R) \geqq h(f(R))$は明らか．逆はつぎの補題より証明される．

(補題)．Eは正規表現，$u_1, u_2 \in \Sigma_2^*$，$u_1\langle E^*\rangle u_2 \subseteq f(\Sigma_1^*)$かつ$h(\langle E^*\rangle) = h_\alpha(E)+1$ならば，つぎの(1),(2)が成立する：(1).$\langle E^*\rangle$はTAG-性をもつ．(2).$\langle E\rangle$の正規表現$E_r$が存在して，$E_r = (\bigcup_i y_i E_i x_i) \cup \delta(E)$,(*) そして$h_\alpha(E_r) = h_\alpha(E)$，ここで$T(\langle E\rangle, u_1, u_2) = \{\bigcup_i (y_i, x_i)\}$そして$E_i$は標準形．

(証明は紙数の関係で省略する)．　例：$\Sigma_1 = \{a_1, \cdots, a_p\}$，$\Sigma_2 = \{0,1\}$とする．$f_{1,j}(a_i) = (1^i 0^i)^j$，$f_{2,j}(a_i) = (10^{2^{i-1}}1)^j$，そして$f_3(a_i) = 10^{S(i)}1$とする，ここで$1 \leqq i \leqq p$，$j \geqq 1$そして$S(i) = 1+\cdots+i$．$f_{1,j}$と$f_{2,j}$はs.h.を保存するが$f_3$は保存しない．　つぎの系の証明は省略する．

[系5.1]．任意の$k \geqq 1$に対して　$h(R) = k$である　$\Sigma = \{0,1\}$の上のs.t.事象Rが存在する．

6．むすび

コード事象がn.c.，l.t.，s.l.t.であるための条件と単射準同型がNC,LT,SLTを保存するための条件とs.h.を保存するための必要条件と十分条件を求めた．謝辞．本学，本多研，木村研の皆様の熱心なご討論と有益な助言に対し深謝いたします．

参考文献

1. McNAUGHTON AND PAPERT, "Counter-Free Automata", MIT Press, 1971.
2. ZALCSTEIN, Locally testable languages, J.C.S.S. 6. (1972).
3. McNAUGHTON, The loop complexity of regular events, Infor. Sci. 1 (1969).

(*). $\lambda \in \langle E\rangle$のとき$\delta(E) = \lambda$，$\lambda \notin \langle E\rangle$のとき$\delta(E) = \phi$.