数理解析研究所講究録
第 213 巻 1974 年 220-226

不確定セルオートマタによる不確定並列写像の逆写像と単射性について

夜久竹夫　早大理工

あらすじ、様相の集合の上で定義されている二項関係(不確定写像)はそれを導入する不確定セルオートマトン(以下で、"不確定"を省略する)が存在するとき不確定並列写像という。本報告では不確定並列写像の逆写像が不確定並列写像であるための必要十分条件、さらに単射であるための必要十分条件を与える。それらは導入するセルオートマトンが与えられている場合とそうでない場合に分けて考察され、後者の場合、Richardson [1] の手法が用いられる。なお、前者の場合、単射であるための等価条件は semi-recursive な述語で与えられる。

1. セルオートマトンを $M=(V, Z^d, X, f)$ であらわす[6]。ここで V は状態集合、Z は整数の集合、d は次元、X は近傍指数、f は局所関係である。f は写像として不確定なばあいも含む。又、一般には totally defined とは限らないとする。

$d>0$ と有限集合 V に対して写像 $c: Z^d \to V$ を様相といい、このような様相の集合を $C_{d,V}$ であらわす(d, V は省略されることがある). 関係 $R \subseteq C \times C$ は通常の方法で R を導入するセルオートマトンが存在するとき不確定並列写像(並列関係)という. 様相の有限集合への制限をパターンといい、上と同様にしてパターン上の不確定並列写像が定義される. それを F_p であらわす.

2.

定義. セルオートマトン $M=(V, Z^d, X, f)$ によって導入されるパターン上の不確定並列写像 F_p が有限集合 $A \subseteq Z^d$ ($0 \in A$) についてA一独立であるとは、任意のパターン $p: A \to V$ と $p': A \to V$ に対して

$$F_p(p) \ni q, \quad F_p(p') \ni q$$

ならば、 $r(0)=p'(0)$; $r(i)=p(i)$ ($i \neq 0$) なる $r: A \to V$ に対して $F_p(r) \ni q$ となることをいう. □

定義. セルオートマトン $M=(V, Z^d, X, f)$ の近傍指数 X に対して集合 $A \subseteq Z^d$ が十分大きいとは、任意の $i \in Z^d$ に対して

$$\bar{X}(0) \cap \bar{X}(i) = \phi \text{ 又は } (Z^d - \bar{X}(A)) \cap \bar{X}(i) = \phi$$

である．ただし $\bar{X}(i)$ は i の近傍，$\bar{X}(A)$ は A の元の近傍の和集合．□

<u>補題1</u>．F を $M=(V,\mathbb{Z}^d,X,f)$ によって導入された totally defined な不確定並列写像とする．もし F の逆写像 F^{-1} が $M'=(V,\mathbb{Z}^d,Y,g)$ によって導入される不確定並列写像ならば，X について十分大きな $A\subseteq\mathbb{Z}^d$ が存在して F_P は A－独立である．□

セルオートマトン $M=(V,\mathbb{Z}^d,X,f)$ と有限集合 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$ $(a_1=0)$ に対して，$M(A)=(V,\mathbb{Z}^d,Y,g)$ をつぎのようなセルオートマトンとする．(i)．$Y=(y_1,\cdots,y_{n'})$ は $A=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{Y}(x_i)$，ただし $X=(x_1,\cdots,x_n)$，となるような近傍であり，(ii) もし，パターン p, q が存在して $F_P(p)\ni q$，$p(0)=v$，$q(y_i)=v_i$ $(\forall i, 1\leq i\leq n')$ ならば，

$$g(v_1,\cdots,v_{n'})\ni v \qquad (1),$$

ただし F_P は M によって導入されるパターン上の不確定並列写像で $\mathrm{dom}\,p=\bar{X}(\bar{Y}(0))$ 又．$\mathrm{dom}\,q=\bar{Y}(0)$ である。
つぎの定理は、不確定並列写像の逆写像が不確定並列写像であるための十分条件をあたえる。同時に、その条件がみたさ

れたときに逆写像を導入するセルオートマトンが構成されることをも示す.

<u>定理1</u>. Fをセルオートマトン$M=(V, Z^d, X, f)$によって導入された不確定並列写像とする。Xについて十分大きな有限集合$A \subseteq Z^d$に対してF_PがA-独立ならば逆写像F^{-1}は(1)で定義されたセルオートマトン$M(A)$によって導入される不確定並列写像である.

<u>証明</u>. $A=\{a_1, \cdots, a_m\}$ $(a_1=0)$, $X=(x_1, \cdots, x_n)$, $Y=(y_1, \cdots, y_{n'})$, $M(A)=(V, Z^d, Y, g)$とする. Gを$M(A)$によって導入される不確定並列写像とする。はじめに、$F^{-1}(d) \ni c$ならば$G(d) \ni c$を示す。

任意の$i \in Z^d$に対してp, qをそれぞれ様相c, dの$X(\bar{A}(i))$と$\bar{A}(i)$への制限とする。このとき、$p(i) \in g(q(i+y_1), \cdots, q(i+y_{n'}))$である。ただし$\bar{A}(i)=\{i+a_1, \cdots, i+a_m\}$.

逆に、$G(d) \ni c$と仮定する。任意の$i \in Z^d$に対して$d(i) \in f(c(i+x_1), \cdots, c(i+x_n))$となることを示す.
(1)より 各$j(1 \leq j \leq n)$ (iは固定) に対して、パターンP_jが存在して.

$$\begin{cases} \mathrm{dom}\ p_j = \bar{X}(\{i+a_1, i+a_2, \cdots, i+a_m\}) \\ p_j(i+x_j) = c(i+x_j) \\ F_P(p_j) \ni q \end{cases}$$

ただし　$q(i+a_k) = d(i+a_k)$　$(1 \le k \le m)$。

$r_1, r_2, \cdots, r_n$ をつぎのようなパターンとする．

$$\begin{cases} r_1 = p_1 \\ r_{j+1}(x) = r_j(x) & (x \ne i+x_{j+1}) \\ \qquad\quad\ \ = p_{j+1}(x) & (x = i+x_{j+1}) \end{cases}$$

ただし、$1 \le j \le n$，$\mathrm{dom}\ r_j = \bar{X}(\{i+a_1, i+a_2, \cdots, i+a_m\})$.

すると $F_P(r_1) \ni q$ から、$F_P(r_n) \ni q$ がえられる。したがって $d(i) \in f(c(i+x_1), \cdots, c(i+x_n))$ である．

Q.E.D.

定理2．セルオートマトン $M=(V, Z^d, X, f)$ により導入された不確定並列写像 F の逆写像が不確定並列写像ならば そのときにのみ，F_P は十分大きなある有限集合 A に対して A－独立である。 □

定理 1, 2 と Richardson [1] を結びつけて、確定的並列写像の単射性についてつぎを得る．

<u>定理3</u>．Fを静止状態 c_q をもつ確定的セルオートマトン $M=(V,Z^d,X,f)$ により導入される totally defined な確定的並列写像とする。Fが単射ならばそのときにのみXについて十分大きな有限集合 $A\subseteq Z^d$ が存在して、F_p がA－独立であり、(1) で定義される $M(A)$ の局所関係gが、確定的、totally defined 又 c_q は $M(A)$ で静止状態である.□

3．不確定並列写像を導入するセルオートマトンの存在だけが仮定されている場合の結果をつぎに述べる．このばあい、近傍が有限集合でおさえられているということがRichardsonによって云いかえられているのでその結果を用いる。

<u>定理A</u>（Richardson [1]）．様相の集合の上の二項関係Fが（静止状態をもつ）不確定並列写像ならばそのときにのみ、（Fに静止状態が存在して）次の(i)～(iii)が成り立つ；

(i) $F(c)\ni d \Rightarrow F(c^\alpha)\ni d^\alpha$ ただし，$c(i+\alpha)=c^\alpha(i)$，$d(i+\alpha)=d^\alpha(i)$ $\forall i\in Z^d$

(ii) (c_i) が unique な accumulation point [1] c^* をもつ、dom Fの様相の無限列ならば $[F(c^*)\ni d^* \Leftrightarrow$ d^* は $F(c_i)\ni d_i$ であ

るような任意の列 (d_i) の accumlation point である］.

(iii) $F(c) \ni d_1$, $F(c) \ni d_2$, $A \supseteq \mathbb{Z}^d$ が有限
$\Rightarrow$ $d(i) \in \{d_1(i), d_2(i)\}$ $\forall i \in A$ であるような d に対して $F(c) \ni d$.

<u>定義</u>. 不確定並列写像Fが有限集合 $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ $(A \ni 0)$ について<u>A－独立</u>とは、$F(c) \ni d$, $F(c') \ni d'$ ならば $e(0) = c'$, $e(i) = c(i)$ $(i \neq 0)$ なる任意の e に対して $F(e) \ni d''$ となることをいう。ただし $d(i) = d'(i) = d''(i)$ $(i \in A)$. □

<u>定理4</u> [5]. 不確定並列写像Fの逆写像が不確定並列写像ならばそのときにのみ有限集合 $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ が存在してFがA－独立. □

<u>定理5</u> [5]. 静止状態 c_q をもつ totally defined な確定的並列写像 $F: C \to C$ が単射ならばそのときにのみ (i) 有限集合Aが存在しFがA－独立, (ii) c_q がFで静止状態, かつ (iii) Fが全射 □

1. D.Richardson, Tessellations with local transformations, JCSS 6(1972), 373 - 388.
2. 夜久竹夫, 不確定セルオートマタに対する並列写像の全射性について, 数研講究録 179(1973), 127-140.
3. T.Yaku, The constructibility of a configuration in a cellular automaton, JCSS 7 (1973), 481 - 496.
4. ——, Inverse and injectivity of parallel relations.
5. ——, Forward continuity and injectivity of parallel relations.
6. H.Yamada and S. Amoroso, Tessellation automata, Information and Control 14 (1969), 299 - 317.