数理解析研究所講究録
第 213 巻 1974 年 227-238

文脈による言語の位相

ＮＨＫ総合技術研究所
相沢輝昭

§1　問題

Σを有限アルファベット，Σ^*をΣ上の語の全体とし、$\lambda\in\Sigma^*$を空語とする。Σ^*の任意の部分集合LをΣ上の言語とよぶ。

$L\subset\Sigma^*$とし、$x\in\Sigma^*$とする。$(u,v)\in\Sigma^*\times\Sigma^*$に対して$uxv\in L$となるとき，$(u,v)$は$L$における$x$の許容文脈であるという。これに対して，$uxv\notin L$となるとき，$(u,v)$は$L$における$x$の禁止文脈であるという。

言語$L\subset\Sigma^*$が与えられたとき，次のようにして，Σ^*から$\mathcal{J}\equiv 2^{\Sigma^*\times\Sigma^*}$（$\Sigma^*\times\Sigma^*$のベキ集合）への写像$\gamma_L$が定義できる：$x\in\Sigma^*$に対して

$$\gamma_L(x)=\{(u,v)\mid(u,v)\in\Sigma^*\times\Sigma^*,\ uxv\in L\}$$

すなわち$\gamma_L(x)$はLにおけるxの許容文脈の全体である。

また，Σ^*上の同値関係$\underset{L}{\sim}$を次のように定義する：

$x, y \in \Sigma^*$に対して

$$x \overset{L}{\sim} y \Longleftrightarrow \mathfrak{C}_L(x) = \mathfrak{C}_L(y)$$

この関係 $\overset{L}{\sim}$ は実は合同関係であり，周知の Myhill の定理は次のように言いかえられる。

［定理 1］（Myhill）　$L \subset \Sigma^*$が regular であるためには，$\mathfrak{C}_L(\Sigma^*)$ が $\mathfrak{C}$ の有限部分集合であることが必要十分である。

したがって，L が regular でないときには，$\mathfrak{C}_L(\Sigma^*)$ は $\mathfrak{C}$ の無限部分集合になるが，$\mathfrak{C}_L(\Sigma^*)$のそれら無限個の元同士──それらはそれぞれΣ^*の語に対する，L における許容文脈の全体である──を何らかの有限の手段で互いに識別し得るのはどのような場合か，という問題を考える。これを，より具体的に次のように定式化する。

$x \in \Sigma^*$に対して，関係 $\overset{L}{\sim}$ によるxの同値類 $[x]_L$ を L によるxの統語論的価値とよぼう。$[x]_L$ はもちろん $\mathfrak{C}_L(x)$ によって完全に特徴づけられる。あるいは，xの統語論的価値 $[x]_L$ は，xの許容文脈の全体 $\mathfrak{C}_L(x)$ と，xの禁止文脈の全体 $\Sigma^* \times \Sigma^* - \mathfrak{C}_L(x)$ によって‘絶対的に’特徴づけられるといってもよい。しかし，$[x]_L$ を許容文脈の一部$d_1 \subset \mathfrak{C}_L(x)$

と，禁止文脈の一部 $d_2 \subset \Sigma^* \times \Sigma^* - \gamma_L(x)$ によって，他の $[y]_L$（$\neq [x]_L$）に対して'相対的に'特徴づけられる場合が考えられる。すなわち次の定義をおく。

〔定義1〕 $x \in \Sigma^*$ の，$L \subset \Sigma^*$ による統語論的価値 $[x]_L$ が有限的に特徴づけられるとは，$\Sigma^* \times \Sigma^*$ の有限部分集合 d_1, d_2 が存在して，

$$\{S \mid S \in \gamma_L(\Sigma^*),\ d_1 \subset S,\ d_2 \subset \Sigma^* \times \Sigma^* - S\} = \{\gamma_L(x)\}$$

となることをいう。言いかえれば，d_1 の元をすべて許容文脈とし，d_2 の元をすべて禁止文脈とするような語の集合が，ちょうど $[x]_L$ となることである。

L が regular ならば $\gamma_L(\Sigma^*)$ は有限集合，したがって同値類 $[x]_L$ の個数も有限だから，任意の $[x]_L$ は当然有限的に特徴づけられることになる。L が regular でなければ同値類 $[x]_L$ の個数は無限であり，$[x]_L$ が有限的に特徴づけられるか否かはもはや自明ではなくなる。すべての $[x]_L$ が有限的に特徴づけられるような，自明でない言語のクラスは，言語の機械的学習の考察にとって有用であると思われる。

以下では，与えられた $L \subset \Sigma^*$ に対して，どのような $[x]_L$

が有限的に特徴づけられるかを考察することにする。そのためにまず $\mathcal{K}$ の値域である $\mathcal{J}$ に位相を導入する。

§2　文脈族のなす空間 $\mathcal{J}$ の位相

$\mathcal{J} = 2^{\Sigma^* \times \Sigma^*}$ とおいたのであった。

$\mathcal{N}$ を自然数の集合とする。写像 $v : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \mathcal{N}$ で、

$$\sum_{x \in \Sigma^* \times \Sigma^*} 1/2^{v(x)} < \infty$$

となるものを $\Sigma^* \times \Sigma^*$ 上の *valuation* とよぶ。

文脈 $x \in \Sigma^* \times \Sigma^*$ の（*valuation* v による）重み $w(x)$ を

$$w(x) = 1/2^{v(x)}$$

と定義する。また、文脈の集合 $S \in \mathcal{J}$ の（*valuation* v による）重み $w(S)$ を

$$w(S) = \sum_{x \in S} w(x) = \sum_{x \in S} 1/2^{v(x)}$$

と定義する。このとき（＊）により

$$w(S) \leq w(\Sigma^* \times \Sigma^*) < \infty$$

である。また空集合 ϕ に対しては $w(\phi)=0$ と規約する。

このとき、S，$T \in \mathcal{J}$ に対して，S と T のあいだの距離 $d(S, T)$ を

$$d(S, T) = w(S-T) + w(T-S) \qquad (1)$$

と定義する。すなわち $d(S,T)$ は、集合 S と T の対称差（くい違い）$(S-T)\cup(T-S)$ に対する重みである。

［補題1］　式(1)により与えられる距離 d は、距離関数の性質を満す。

このことから、$\mathcal{T}$ は $\Sigma^*\times\Sigma^*$ 上の一つの valuation v を与えれば、それにより(1)のように定義される距離関数 d をもつ距離空間 $(\mathcal{T}, d)$ となる。

この空間の位相は一見すると valuation v に依存しているようにみえるが、条件(*)がかなり強くて、以下に示すように、v の違いには無関係に定まっている。

$\Sigma^*\times\Sigma^*$ の有限部分集合の全体、および ϕ を合せたものを D と書く。また $d_1, d_2\in D$ に対して $\mathcal{T}$ の部分集合を次のように定める。

$$\pi(d_1,d_2)=\{S \mid S\in\mathcal{T},\ d_1\subset S,\ d_2\subset \Sigma^*\times\Sigma^*-S\}$$

また d_1, d_2 を D 全体に渡って動かして得られる $\pi(d_1,d_2)$ の族を $\mathcal{B}^*$ とおく。すなわち

$$\mathcal{B}^*=\{\pi(d_1,d_2)\mid d_1, d_2\in D\}$$

[補題2] $\mathcal{O}^*$は$\mathcal{T}$上の開集合の基の公理を満す.

これにより, $\mathcal{O}^*$ の元の任意個の和集合として表わされる, $\mathcal{T}$の部分集合の全体$\mathcal{O}$を開集合族として、$\mathcal{T}$は位相空間($\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$)となる。このとき次の定理が成り立つ。

[定理2] ($\mathcal{T}, d$)と($\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$)は同相である。

実は($\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$)は文献[1]で述べられている学習空間の部分空間である特性空間あるいは言語空間とも同相になる。[1]によれば, この空間の位相的性質は次の程度に明らかにされている。

[定理3] 位相空間($\mathcal{T}, \mathcal{O}$)は第1, 第2可算公理を満し, コンパクト, 可分かつ完全不連結である。またHausdorff空間, 正則空間および正規空間である。具体的に距離関数を与えて, ($\mathcal{T}, \mathcal{O}$)と同相な完備かつ全有界な距離空間を構成できる。

この空間の特異性は$\mathcal{O}^*$の任意の元 $\pi(d_1, d_2)$が開集合かつ閉集合というところにある.

上の定理にいう$(\mathcal{T}, \vartheta)$と同相な距離空間とは，たとえば先に構成した$(\mathcal{T}, d)$である。

空間$\mathcal{T}$はコンパクト距離空間であるから，$\mathcal{T}$の任意の無限部分集合は少なくとも一つ集積点をもつ。したがって，Lが regular でないときには$\gamma_L(\Sigma^*)$は少なくとも一つ集積点をもつことになる。

このとき，§1の末尾で設定した問題に次のような解答が与えられる。

［定理4］　$x \in \Sigma^*$とし，$L \subset \Sigma^*$とする。このとき次の条件は互いに同値である。

(a)　$[x]_L$は有限的に特徴づけられる。

(b)　$^{\exists}d_1, d_2 \in D$が存在して

$$\pi(d_1, d_2) \cap \gamma_L(\Sigma^*) = \{\gamma_L(x)\}$$

(c)　$\gamma_L(x)$が，$\gamma_L(\Sigma^*)$の孤立点

(d)　構え$\gamma_L(\Sigma^*)$のもとで$\gamma_L(x)$が学習可能。[†)]

---

†) この学習可能性の概念は文献［2］による。

§3 文脈のカタストロフ

言語$L \subset \Sigma^*$が与えられたとき，§1のようにしてΣ^*上に同値関係$\underset{L}{\simeq}$が与えられる。さらに，Σ^*に対する位相を，先に定義した写像

$$\gamma_L : \Sigma^* \longrightarrow \mathcal{T}$$

が連続になるような最弱のそれとして与える。

このように同値関係と位相の与えられた集合Σ^*の元は、カタストロフ理論の一般論[3]に従って，2種類に分類できる。

［定義2］　$x \in \Sigma^*$がL-*stable*（LはΣ上の言語）とは、xの適当な近傍Vが存在して，$\forall y \in V$に対して、$x \underset{L}{\simeq} y$となることである。L-*stable*でないとき，L-*catastrophic*とよぶ。

このとき次の定理が得られる。

［定理5］　$x \in \Sigma^*$とし，$L \subset \Sigma^*$とする。このとき次の条件は互いに同値である。

(a)　$[x]_L$は有限的に特徴づけられる。

(b)　xはL-*stable*.

(c)　$[x]_L$はΣ^*の開集合

(d) $[x]_L$ は Σ^* の開かつ閉なる集合。

したがって，$[x]_L$ が有限的に特徴づけられないことと，x が L-catastrophic であることとは等価になる。

§4 おわりに

以上のようなこと，たとえば $[x]_L$ が有限的に特徴づけられるための条件なども最終的に言語 L に対する条件にまで還元できなければ面白くない。

一般に，言語 $L \subset \Sigma^*$ が与えられると，上述のように Σ^* に合同関係 $\underset{L}{\sim}$ と，位相が導かれるが，それらの性質を通して逆に L の性質を見る，という方法を考える。さしあたって，$^\forall x \in \Sigma^*$ が L-stable になるための，L に関する条件を考えたい。この問題に対する二，三のコメントと示唆的な例を述べて，本稿を終ることにする。

いうまでもなく，L が regular ならば，$^\forall x \in \Sigma^*$ は L-stable である。

L が regular でなければ $\delta_L(\Sigma^*)$ は $\mathcal{F}$ の無限部分集合でであり，したがって（定理3により $\mathcal{F}$ がコンパクトであることから）$\delta_L(\Sigma^*)$ は $\mathcal{F}$ において少くとも一つの集積点をもつ。それがすべて $\delta_L(\Sigma^*)$ の外にあれば，定理4によって，

$^\forall x \in \Sigma^*$ は L-stable になる。しかし，写像 γ_L の特殊性によって，$\gamma_L(\Sigma^*)$ が集積点をもてば，そのうちの少くとも一つは $\gamma_L(\Sigma^*)$ に入る —— したがって L が regular でなければ $^\exists x \in \Sigma^*$ が存在して x は L-catastrophic になる —— というのが予想である。次に，そのようになっている例を与える。

〔例〕 $\Sigma = \{a, b\}$， $L = \{a^m b^m \mid m \geqq 0\}$

Σ^* を次のように分割する。

$$
\begin{cases}
L^p = \{a^m b^{m+p} \mid m \geqq 1\}, & p \in N \\
L^{-p} = \{a^{m+p} b^m \mid m \geqq 1\}, & p \in N \\
L^0 = L - \{\lambda\} & \\
\{a^p\}, & p \in N \\
\{b^p\}, & p \in N \\
\text{その他} &
\end{cases}
$$

このとき

$^\forall x \in L^p$ に対して $\gamma_L(x) = \{(a^{n+p}, b^n) \mid n \geqq 0\}$

$^\forall x \in L^{-p}$ 〃 $\gamma_L(x) = \{(a^n, b^{n+p}) \mid n \geqq 0\}$

$^\forall x \in L^0$ 〃 $\gamma_L(x) = \{(a^n, b^n) \mid n \geqq 0\}$

$$
\begin{aligned}
\gamma_L(a^p) &= \{(a^n, b^{n+p}) \mid n \geqq 0\} \\
&\quad \cup \{(a^n, a^q b^{n+p+q}) \mid n, q \geqq 0\} \\
\gamma_L(b^p) &= \{(a^{n+p}, b^n) \mid n \geqq 0\} \\
&\quad \cup \{(a^{n+p+q} b^q, b^n) \mid n, q \geqq 0\}
\end{aligned}
$$

$$\gamma_L(\lambda) = \{(a^m, b^m) \mid m \geqq 0\}$$
$$\cup \{(a^n b^n, b^{m-n}) \mid m, n, m-n \geqq 0\}$$
$$\cup \{(a^{m-n}, a^n b^m) \mid m, n, m-n \geqq 0\}$$
$$\gamma_L(\text{その他の元}) = \phi$$

以上のことから

$$\gamma_L(L^p) \cap \gamma_L(a^p),\ \gamma_L(L^{-p}) \cap \gamma_L(b^p), \qquad p \in N$$
$$\gamma_L(L^0) \cap \gamma_L(\lambda)$$

以外は交わりをもたないことがわかる。このことから $\phi \in \mathcal{T}$ は $\gamma_L(\Sigma^*)$ の唯一つの集積点であることがわかり、しかも $\phi \in \gamma_L(\Sigma^*)$。したがって

$$\text{その他} \equiv \Sigma^* b a \Sigma^*$$

の任意の元は L-catastrophic である。

参考文献

[1] 相沢，上坂，江原，尾関：学習空間の位相的性質，電子通信学会誌，56-D, 10 (1973), 561-568 または Sur l'espace topologique lié à une nouvelle théorie de l'apprentissage, Kybernetik (1974, 掲載予定).

[2] 上坂，相沢，江原，尾関：学習可能性の理論，ibid 56-D, 7 (1973), 416-423. または Theory of learnability, ibid, 13, 3 (1973), 123-132.

[3] R. Thom : *Stabilité structuelle et morphogénèse*, Benjamin (1972). または, 佐藤 創：カタストロフ理論の基礎, ICS研究会夏期シンポジウム予稿 (1973).