数理解析研究所講究録
第220巻 1974年 54-76

非コンパクトなリーマン多様体について

東工大理　前田正男

Mは連結，完備なn次元リーマン多様体とする。そして，いたる所，正の断面曲率 $0<K_\sigma$ をもつとする。この仮定のもとで，Mがコンパクトの場合には，いろいろな人達により多くの重要な結果が得られている事は良く知られている。これにくらべて，Mが非コンパクトの場合にはあまり研究がなされていなかった様に思われる。Cohn-Vossenなどにより，2次元の場合に研究されていたのであるが，その中に Cohn-Vossen による

「Mは連結，完備，非コンパクトな2次元リーマン多様体で，正のガウス曲率をもつとする。このときMは2次元ユークリッド空間 E^2 に微分同型である。」

という結果がある。この事実に関して，1969年 Gromoll と Meyer は[7]において，この Cohn-Vossen の結果が一般次元のMに対しても成立する事を示した。即ち

<u>定理</u>. Mは連結，完備な非コンパクト，n次元リーマン

多様体で，正の断面曲率 $0<K_\sigma$ をもつとする。このときMはn次元ユークリッド空間 E^n に微分同型である。

この定理の証明において，彼等はヤコビ型の微分方程式

(※) $\varphi''+a\varphi=0$，ここに $a:R\to R$ はある微分可能な函数

を考える事により，Mの凸性をうまく引き出す事に成功した。即ち，次に述べる重要な補題3である。以下定理，主題，補題等の番号は全て引用文件のものと同じものをもちいる事にする。

<u>補題3.</u> $C\subset M$ はコンパクトな部分集合とする。このとき，コンパクトな集合 $D\supset C$ で，点 $q\in M-D$ と測地線 $c:[\alpha,\beta]\to C$ を任意に固定したとき，函数 $s\to d(c(s),q)$ は convex な函数である。

ここに d はリーマン計量から決まるM上の距離函数を表わす。又測地線はことわらない限り全て弧長をパラメーターにもつものとする。

<u>定義.</u> リーマン多様体Mの部分集合 $C\subset M$ が totally convex（略して t.c.s. とも書く）だとは，C の任意の2点 p,q と p,q を結ぶ任意の測地線 $c:[0,\beta]\to M$, $c(0)=p$ $c(\beta)=q$ に対し $c([0,\beta])\subset C$ のときをいう。

このとき，$\bar{C}$ は滑めらかではないかも知れないある $k-1$

次元の境界∂Cとk次元の全測地的なMの部分多様体$\mathrm{int}\, C$から成る事が分る。[3；定理1.6 p418]参照。補題3に続いて，更に幾何学的に興味のある次の補題が得られる。

補題5. Mは非コンパクトなリーマン多様体で，正の断面曲率をもつとする。このときコンパクトなt.c.s.の族$\{C_i\}$ $i=1,2,\cdots$で

(1) $$C_i \subset \mathrm{int}\, C_{i+1}\ ,\quad i=1,2,\cdots$$

(2) $$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = M$$

という性質を満たすものが存在する。

これらの重要な事実をもちいて，主定理を証明する事に成功しているのであるが，更にこの論文の中においては，Chernにより与えられた予想に肯定的な解決を与えている。即ち

定理4. Mは補題5と同じ仮定を満たすとする。このとき点$p \in M$と指数写像$\exp_p : M_p \to M$に対し

$$\lim_{v\to\infty} \exp_p(v) = \infty\ .$$

他にもいろいろと幾何学的な問題や予想などが書かれてあり，大変勉強になる論文であると思う。又この証明中におけるヤコビ型の微分方程式をもちいる事により，塩浜氏は[14]において，Mが非コンパクトで正の断面曲率をもつならMにはコンパクトな極小部分多様体が存在しない事を示した。更に，この結果に関連して，伊井氏は[8]において興味ある

結果を得ている。さてこの正曲率のMに対する結果は，J. Cheeger と D. Gromoll により [3] において非負の曲率をもつリーマン多様体に対し一般的な形で成立する事が示された。以下この [3] における結果を紹介する。

<u>定義</u>. 測地線 $c:[0,\infty)$ (resp. $(-\infty,\infty)$) $\to M$ が ray (resp. line) だとは，c のどの segment (部分弧) も最短のときをいう。

M が非コンパクトなる事と，任意の点 $p\in M$ に対し p から出る ray が存在する事とは同値である。点 $p\in M$ に対し，$c:[0,\infty)\to M$ は $c(0)=p$ なる ray とする。open な半空間を

$$B_c := \bigcup_{t>0} B_t(c(t))$$

で定義する。ここに $B_r(q)$ は点 $q\in M$ を中心とする半径 r の open な距離球を表わす。この時

<u>定理 1.2</u> (Basic Construction). B_c の補集合 $M-B_c$ は totally convex である。

証明). 端点 $c_0(0)$, $c_0(l)\in M-B_c$ をもちある $s\in(0,l)$ に対し $c_0(s)\in B_c$ となる測地線 $c_0:[0,l]\to M$ が存在したとして矛盾を出す。三角不等式より $t_2\geq t_1>0$ なら $B_{t_2}(c(t_2))\supset B_{t_1}(c(t_1))$ となる。$c_0(s)=q\in B_c$ より，t_0 が存在して $q\in B_{t_0}(c(t_0))$。従って全ての $t\geq t_0$ に対し $B_t(c(t))\ni q$。$c_0(s_t)$ は ray 上の点 $c(t)$ に最も近い c_0 上の点とする。$c_0^t := c_0|[0,s_t]$ とおく。

又 $c_0(\Delta t)$ から $c(t)$ への最短測地線を c_1^t, $c(t)$ から $c_0(0)$ への最短測地線を c_2^t とする。$\varepsilon>0$ を $t_0-\varepsilon=d(q,c(t_0))$ と置くと $L(c_1^t)\leq d(c(t),q)\leq t-\varepsilon$, $L(c_2^t)\geq t\geq L(c_1^t)+\varepsilon$, 即ち $L(c_2^t)\geqq L(c_1^t)+\varepsilon$ が全ての $t\geqq t_0$ に対して得られる。又十分大きな t を取ると, $d(c_0(0),c(t))=L(c_2^t)\geqq t$ より, $L(c_2^t)+L(c_1^t)>L(c_0^t)$ が得られる。今2次元ユークリッド空間 E^2 の中に三辺の長さが, c_0^t, c_1^t, c_2^t と等しい3辺形をつくりそれを $(\overline{c_0^t},\overline{c_1^t},\overline{c_2^t})$ とする。c_0^t, c_1^t ではさまれる角を α_2^t, $\overline{c_0^t},\overline{c_1^t}$ ではさまれる角を $\overline{\alpha_2^t}$ としたとき, Toponogov の比較定理により $\overline{\alpha_2^t}\leq\alpha_2^t$ が言える。ユークリッド平面における余弦公式より

$$\cos\overline{\alpha_2^t}=\frac{L^2(c_0^t)+L^2(c_1^t)-L^2(c_2^t)}{2L(c_0^t)L(c_1^t)}$$

$$=\frac{L(c_1^t)+L(c_2^t)}{2L(c_1^t)}\cdot\frac{L(c_1^t)-L(c_2^t)}{L(c_0^t)}+\frac{L(c_0^t)}{2L(c_1^t)}\text{。}$$

そして $L(c_2^t)-L(c_1^t)\geqq\varepsilon$, $L(c_0^t)<L(c_0)$, $L(c_2^t)\geqq t$ であったから大きな t に対して $\cos\overline{\alpha_2^t}<0$ が得られる。というのは

$$\frac{L(c_1^t)-L(c_2^t)}{L(c_0^t)}\leqq\frac{-\varepsilon}{L(c_0^t)}\leqq\frac{-\varepsilon}{L(c_0)},\quad\frac{L(c_1^t)+L(c_2^t)}{2L(c_1^t)}=\left(\frac{1}{2}+\frac{L(c_2^t)}{2L(c_1^t)}\right)$$

$\geqq\frac{1}{2}$ より $\cos\overline{\alpha_2^t}\leqq\frac{-\varepsilon}{2L(c_0)}+\frac{L(c_0^t)}{2L(c_1^t)}$。ところが

$\frac{L(c_0^t)}{L(c_1^t)}\to 0\ (t\to\infty)$。この事より $\pi/2<\overline{\alpha_2^t}\leq\alpha_2^t$ が分る。

ところが $c_0(s_t)$ は $c(t)$ に最も近く $s_t \in (0, \ell)$ だから $\alpha_2^t = \frac{\pi}{2}$ でなければならないから，これは矛盾である。 q.e.d.

この定理より

<u>主題1.3</u>. 点 $p \in M$ に対し，コンパクトな t.c.s. の族 $\{C_t\}_{t \geq 0}$ で次の条件を満たすものがある：

(1) $t_2 \geq t_1$ なら $C_{t_2} \supset C_{t_1}$ で

$$C_{t_1} = \{q \in C_{t_2} : d(q, \partial C_{t_2}) \geqq t_2 - t_1\}$$

(2) $\bigcup_{t \geq 0} C_t = M$

(3) $p \in C_0$ でもし $\partial C_0 \neq \phi$ なら $p \in \partial C_0$。

C_t は $C_t := \bigcap_c (M - B_{c_t})$ で与えられる。ここに intersection は p から出る全ての ray c に対してであり，$c_t : [0, \infty) \to M$ は $c(t)$ からでる $c_t(s) := c(t+s)$ で与えられる ray を表わしている。C_t が (1), (2), (3) を満たす事を見るのは，そんなに難かしくない。次の定理は非常に重要である。

<u>定理1.10</u>. M は非負曲率をもつとし，$C \subset M$ は $\partial C \neq \phi$ なる closed な t.c.s. とする。このとき任意の測地線 $c : [\alpha, \beta] \to M$ s.t. $c([\alpha, \beta]) \subset C$ に対し $\psi(s) := d(c(s), \partial C)$ で定義される函数 $\psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ は convex である。即ち $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \geqq 0$ $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = 1$ なる $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ に対し $\psi(\tilde{\alpha} s_1 + \tilde{\beta} s_2) \geqq \tilde{\alpha} \psi(s_1) + \tilde{\beta} \psi(s_2)$。

証明). 任意の $\underline{s}$, $\underline{s} \in (\alpha, \beta)$ に対し $c_{\underline{s}} : [0, d] \to M$ は $c(\underline{s})$ から ∂C への最短測地線とする。ある区間 $(\underline{s} - \delta, \underline{s} + \delta)$ 上で

ψが一次函数 $d-\cos\alpha\cdot(s-\underline{s})$ で押えられている事が言えれば十分である。ここに $\alpha := \measuredangle(\dot{c}(\underline{s}), \dot{c}_{\underline{s}}(0))$ はベクトル $\dot{c}(\underline{s})$ と $\dot{c}_{\underline{s}}(0)$ のなす角度を表わす。$s>\underline{s}$ の時について示せば，$s<\underline{s}$ の時は全く同様にできる。以下3つの場合に分ける。

(a) $\alpha=\frac{\pi}{2}$ のとき。$E(t)$ は $c_{\underline{s}}$ に沿った平行ベクトル場で，$\dot{c}(\underline{s})$ からつくられたものとする。この時 Berger [1] により，正数δで，$\underline{s}\leq s<\underline{s}+\delta$ なる任意の s に対し $c_s(t):=\exp_{c_{\underline{s}}(t)} s\cdot E(t)$ で定義される曲線の長さが $\leq d-(s-\underline{s})\cos\frac{\pi}{2}$ なるという条件を満たすものが存在する事が知られている。そして或るs'に対し等号が成立するのは $c_s(t):[\underline{s}, s']\times[0,d]\to C$ が平坦で全測地的な rectangleを与える時に限る。以下，この事実を "Bergerの比較定理" と呼ぶ事にしよう。後は totally convex set の性質から $c_s(d)\notin C^{\circ}$を見るのはやさしい。

(b) $\alpha>\frac{\pi}{2}$ の時。$E(0):=\tilde{\alpha}\,\dot{c}_{\underline{s}}(0)+\tilde{\beta}\,\dot{c}(\underline{s})$，$\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\geq 0$ $\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2=1$ かつ $E(0)\perp\dot{c}_{\underline{s}}(0)$ となるごとく $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$を選ぶ。測地線 $\exp_s E(0)$ を (a) の場合における c と思って，(a) におけるごとく曲線族 $c_s(t)$を作る。すると $\delta>0$ が存在して，任意の s, $\underline{s}\leq s\leq\underline{s}+\delta$ に対し $d(\exp_{c(\underline{s})}\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})\cdot(s-\underline{s})\cdot E(0), \partial C)\leq d$。又一方 Toponogov の比較定理より $d(c(s), \exp_{c(\underline{s})}\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})(s-\underline{s})E(0))$ $\leqq (s-\underline{s})\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})=-(s-\underline{s})\cos\alpha$ が得られる。

従って三角不等式より

$$d(c(s),\partial C)\leq d(c(s),\exp_{c(\underline{s})}\cos(\alpha-\tfrac{\pi}{2})\cdot(s-\underline{s})E(0))$$
$$+d(\exp_{c(\underline{s})}\cos(\alpha-\tfrac{\pi}{2})\cdot(s-\underline{s})E(0),\partial C)$$
$$\leq d-(s-\underline{s})\cos\alpha\text{。}$$

(c) $\alpha<\frac{\pi}{2}$ のとき。a_s は $C_{\underline{s}}$ から $c(s)$ への最短測地線とする。ここに $a_s(0)=c_{\underline{s}}(t_s)$ とする。すると $\dot{a}_s(0)\perp\dot{c}_{\underline{s}}(t_s)$。又上で見たように $d(c(s),\partial C)\leq d-t_s$。再び Toponogov の比較定理と E^2 における余弦定理より $d^2(c_{\underline{s}}(t_s),c(s))\leq t_s^2+(s-\underline{s})^2-2t_s(s-\underline{s})\cos\alpha$。$\dot{c}_{\underline{s}}(t_s)\perp\dot{a}_s(0)$ より再び Toponogov により，$(s-\underline{s})^2\leq d^2(c_{\underline{s}}(t_s),c(s))+t_s^2$ が得られる。上の2つの不等式を加える事により $2t_s(s-\underline{s})\cos\alpha\leq 2t_s^2$ が，従って $(s-\underline{s})\cos\alpha\leq t_s$ がえられる。かくして $d(c(s),\partial C)\leq d-t_s\leq d-(s-\underline{s})\cos\alpha$。 q.e.d.

この定理1.10よりただちに

<u>定理1.9</u>. Mは非負曲率をもつとし，C は $\partial C\neq\phi$ なる closed な t.c.s. とすると

(1) 任意の $a\geq 0$ に対し，C^a は totally convex

(2) $\dim C^{max}<\dim C$，

ここに C^a, C^{max} は $C^a:=\{q\in C:d(q,\partial C)\geq a\}$, $C^{max}:=\bigcap_{C^a\neq\phi}C^a$ で与えられる closed な t.c.s. である。

非負曲率の M に対し，$\{C_t\}_{t\geq 0}$ は点 $p\in M$ から主題1.3の方法

で作られたコンパクトな t.c.s. の族とする。$C(1) := C_0$ とおく。もし $\partial C(1) \neq \phi$ なら $C(2) := C(1)^{max}$ とおく。帰納的に, $i=1,2,\cdots$ に対しもし $\partial C(i) \neq \phi$ なら $C(i+1) := C(i)^{max}$ とおく。このとき定理1.9の(2)によりある整数 $k \geq 1$ で $\partial C(k) = \phi$ なるものが存在する事が分る。この $C(k)$ を M の soul と呼び S で表わす。以上をまとめて,

<u>定理1.11</u>. M には境界のないコンパクトな M の全測地的部分多様体 S で, totally convex になっているものがある。次元は $0 \leqq \dim S < \dim M$。

そしてこの減少していく t.c.s. の族 $\{C_t\}_{t\geq 0}$ で $C(1) \supset C(2) \supset \cdots \supset C(k) = S$ をもちいて, 非コンパクト, 非負曲率のリーマン多様体の構造が次のように明らかになる。

<u>定理2.2</u>. S は点 $p \in M$ から, 主題1.3, 定理11 の方法により得られた M の soul とする。このとき, M は S の M におけるノーマルバンドル $\nu(S)$ に微分同型である。

証明の為いくつかの補題が必要である。

<u>補題2.3</u>. M の任意のコンパクト集合 D に対し次の条件をみたす数 $\varepsilon_D > 0$ が存在する: 全ての $p \in D$ と $0 < r \leqq \varepsilon_D$ に対し

(1) $B_r(p)$ は $\exp_p$ による $0 \in M_p$ を中心とするユークリッド球の像で, しかも強い意味で convex になっている,

(2) $c : [0, \eta] \to B_r(p)$ は一点でない測地線, $c_0 : [0, 1] \to B_r(p)$

は p から $c(0)$ への最短測地線で弧長に比例したパラメーターをもち, $\langle \dot{c}(0), \dot{c}_0(1) \rangle \geqq 0$ とする。このとき函数 $s \to d(c(s), p)$ は $[0, \eta]$ 上で強義単調増加である。

証明). M の各点にその点の convex 半径を対応させる函数は M 上の連続函数である事が知られているから, この函数は D 上で最小値 $\hat{\varepsilon}_D > 0$ をとる。$0 < \varepsilon_D \leqq \hat{\varepsilon}_D$ は次の様に十分小さく取る: $c_0 : [0, r] \to M$, $c_0 \in D$, $0 < r \leqq \varepsilon_D$ に沿っての c_0 に垂直なヤコビ場 Y, $Y(0) = 0$ 全体の上で指数形式 I が正定値になる。

注. $B_r(p)$ が強い意味で convex とは, 任意の $B_{\tilde{r}}(q) \subset B_r(p)$ が普通の意味で convex になっているときをいう。点 p の convex 半径とは, このような r の sup をいう。

t.c.s. C と $r \geqq 0$ に対し $C^r := \{p \in M : d(p, C) \leqq r\}$ とおく。$\partial C \neq \phi$ のときには C_0 から M の soul S を得たのと全く同じ手続きにより $C := C(0)$, $C(1) := C(0)^{max}, \cdots, C(k) = S$ s.t. $\partial C(k) = \phi$, $C(i+1) = C(i)^{max}$ という系列が得られる。この S は C の soul と呼ばれる。$C(0)^{max} = C(0)^{a_0}$ とする。

<u>補題 2.4</u>. C は $\partial C \neq \phi$ なるコンパクトな t.c.s. で, $0 < 3\varepsilon = \varepsilon_C \leqq a_0$ とする。ε_C は補題 2.3 から決まった数である。

$0 < a_i := \max\{d(p, \partial C(i)) : p \in C(i)\}$ for $0 \leqq i < k$ とおく。

すると $C(i+1) = C(i)^{a_i}$。このとき

(1) 実数 $0<\delta\leq\varepsilon$ で次のようなものが存在する：$0\leq a\leq a'\leq a_i$, $a'-a<\delta$, $0\leq i<k$ なる限り全ての $p\in C(i)^a$ に対し $d(C(i)^{a'}, p)<\varepsilon$。

(2) $0\leq a<a'<a_0$, $a'-a<\delta$ が与えられると，同位相 $\partial C^a\times[0,1]\to C^a-\mathrm{int}\,C^{a'}$ で $p\times 0\to p$ なるものが存在する。特に全ての位相的超曲面 ∂C^a は C においてカラー近傍をもつ。

(3) $0\leq a_0-a<\delta$ に対し $C^a\to C(1)$ という強変位レトラクトが存在する。

(4) $0<r\leq a_0-a<\delta$ なら，$C(1)$ を固定する同位相 $C^a\to C\cap {}^rC(1)$ が存在する。

(5) $0\leq a\leq a'\leq a_i$, $a'-a<r<\delta$, $0<i<k$ とする。すると $C(i+1)$ を固定する同位相 $C\cap{}^r[C(i)^a]\to C\cap{}^r[C(i)^{a'}]$ が存在する。

証明省略。この補題よりただちに

<u>定理 2.5</u>. $C\subset M$ はコンパクトで $\partial C\neq\phi$ なる t.c.s. とする。

(1) $0<a<a_0$ なら同位相 $\partial C\times[0.1]\to C-\mathrm{int}\,C^a$ で，全ての $p\in\partial C$ に対し $p\times 0\to p$ なるものがある。

(2) $C(1)$ は C の強変位レトラクトである。

(3) $S=C(k)$ は C の soul, $\nu(S)$ は C の接バンドルにおける

Sのノーマルバンドル，$\nu_r(S)$ は $\{v\in\nu(S):\|v\|\leq r\}$ で与えられるバンドルとする。するとS上の恒等写像を引き起す同位相 $\nu_1(S)\to C$ がある。

証明：εとδを補題2.4におけるごとく選ぶ。

(1) $[0,a]$の分割 $0=b_0<b_1<\cdots<b_m=a$ で $b_{j+1}-b_j<\delta, 0\leq j<m$ なるものを取る。補題2.4の2)により同位相 $F_j:\partial C^{b_j}\times[j/m, j+1/m]\to C^{b_j}-\mathrm{int}\,C^{b_{j+1}}, F(p,j/m)=p$ なるものが存在する。帰納的に，同位相 $G_{j+1}:\partial C\times[0,j+1/m]\to C-\mathrm{int}\,C^{b_{j+1}}$ が得られるなら，G_mが求めるものである。$G_1:=F_0$ とおき，G_j, $1\leq j<m$ まで決まったとしてG_{j+1}を

$$G_{j+1}(p,t):=\begin{cases}F_j(G_j(p,j/m),t) & , \quad j/m\leq t\leq j+1/m\\ G_j(p,t) & , \quad 0\leq t\leq j/m\end{cases}$$

で定義する。2番目の主張は，初めの議論をある $a<a'<a_0$ に対して適用すればよい。

(2) $0<a<a_0$ を(1)におけるごとく選ぶ。するとCは$C(1)$を固定してC^aにレトラクトでき，2.4 (3)から $C^a\to C(1)$ なる強変位レトラクトが存在するから。

(3) (1)と2.4の(4)を結合して同位相 $C\to C\cap^r C(1)$ が見つかる。2.4の(5)を有限回くり返す事により同位相 $C\cap^r C(1)$ $=C\cap^r[C(1)^0]\to C\cap^r[C(1)^{a_1}]=C\cap^r C(2)$ で$C(2)$は固定しているものが見つかる。従って上の事と合わせて，同位相

$C \to C \cap^r [C(1)^{a_1}] = C \cap^r [C(2)]$ で $C(2)$ を固定しているものが得られた。この方法を帰納的に減少していく t.c.s. の族 $\{C(i)\}$ の上に適用して最後に S を動かさない同位相 $C \to C \cap^r C(k) = C \cap^r S$ が得られる。他方，δ の選び方より $V_r(S)$ は M の指数写像により $C \cap^r S$ の上に微分同型に写像される。従って，$V_1(S) \to V_r(S) \to C \cap^r S \to C$ という同位相が得られた。

定理2.2の証明。主題1.3において作った t.c.s. の族 $\{C_t\}$ に対し，$C_1 = C$ とおいて定理2.5を適用すると同位相 $V_1(S) \to C_1$ と $V_{i+1}(S) \underset{int}{-} V_i(S) \to C_{i+1} - int\, C_i$, $i = 1, 2, \cdots$ が存在する。この事から同位相 $V(S) \to M$ は簡単に与えられる。

又 $\dim S \geq 1$ のときには，次の様な重要な

定理3.1. 点 $q \in S$ におけるベクトル $u \in S_q$, $v \in M_q$ s.t. $v \perp S_q$ に対し

$$R(u, v)v = R(v, u)u = 0.$$

が示される。証明は簡単ではないので省略する。この定理よりもし $\dim S \geq 1$ なる soul が M に存在するなら，M は正曲率（いたる所の意味で）でありえなくなるから，もし M が正曲率なら $\dim S = 0$，従って定理2.2より M は E^n に同位相という結果が示される。定理2.2の証明においては同位相である事を示したが，Gromoll 達はこの同位相が微分同相に近似

されると述べている。この事はそんなに簡単な事のようには思われない。

更に，彼等はこの t.c.s. という概念をうまくもちいて，Toponogov により与えられた次の分解定理の別証を与えている。

<u>定理 4.3 (Toponogov)</u>. M は非負曲率をもつリーマン多様体とする。もし M に line が存在するなら，M は $\overline{M}\times E^1$ に等長である。ここに $\overline{M}$ はある非負曲率のリーマン多様体。

このToponogovの結果をもちいて，

<u>系 6.2</u>. (1) M は一意的に $\overline{M}\times E^k$ と書ける。ここに $\overline{M}$ の等長群 $I(\overline{M})$ はコンパクトである。

(2) $I(M) = I(\overline{M})\times I(E^k)$.

(3) もし M が正曲率なら，$I(M)$ で不変な点 $q\in M$ が存在する。

という結果が得られている。定理 4.3 は [4] において非負のリッチ曲率をもつ多様体に対して拡張されている。又この系 6.2 の (1) より S.B.Meyer の定理が次の様な形に拡張される事が容易に分る：

「M はコンパクト，非負曲率 $0\leqq K_\sigma$ をもつリーマン多様体で，ある一点 $p\in M$ において曲率が $K_\sigma(p)>0$ とする。このとき M の基本群 $\pi_1(M)$ は有限である。」

P.E. Ehrlich は [6] において，この結果がリッチの曲率におき代えても成立する事を次の様な形で証明したとしている：

「Mはコンパクトなリーマン多様体で非負のリッチ曲率をもつとする。もしある一点 $p \in M$ でリッチ曲率が正なら，M上にはいたる所正のリッチ曲率をもつリーマン計量が存在する。」

従ってこの結果より，Meyer の定理から $\pi_1(M)$ は有限になる事は明らか。又 Ehrlich の結果が断面曲率におき代えてもなり立つかどうかは興味ある問題のように思われる。

以下，Gromoll と Cheeger により得られたこれらの結果のいくつかの application を示す。まず非コンパクト，正曲率の場合に得られた結果がどれ位，非コンパクト，非負曲率のリーマン多様体に対して成立するかという事が考えられる。Gromoll & Meyer は [7; p84] において，Rauch により提起された

「Mはコンパクト，単連結なリーマン多様体としたとき，点 $q \in M$ で q の第一 conjugate locus と cut locus で交わるものがあるか？」

という問題の非コンパクト，正曲率な場合における解答を与えている。すなわち

「Mは非コンパクト，正曲率なリーマン多様体とすると，

点 $p \in M$ で p の第一 conjugate locus と cut locus で交わるものがある。」

この結果を，単連結，非負曲率な非コンパクトの M に対し拡張しようとしても，コンパクトな場合に，Rauch の問題が解決されていないのであるから，一般にこれだけの仮定では難かしい事が分る。M が正曲率のときには E^n に同位相な事に注目して次の結果を得る：

定理〔10〕．M は E^n に同位相な非コンパクトなリーマン多様体で，非負の曲率をもつとする。このとき点 $q \in M$ で q の cut locus と第一 conjugate locus が交わるものがある為の必要十分条件は，M が flat でない事である。更に M が 2,3 次元の場合には，M が E^n に同位相という仮定は単連結でおき代えられる。

証明は Toponogov の分解定理と，主題 1.3 におけるコンパクトな t.c.s. の族 $\{C_t\}_{t \geq 0}$ をもちいる事により，点 $q \in M$ で

(1) 1点だけからなる集合 $\{q\}$ が t.c.s. かつ

(2) $\exp_q : M_q \to M$ がいたる所 maximal rank

なるものが存在する場合に帰着されうる事を示す。(1) は M が E^n に同位相なる事より定理 2.2 により存在が保証される。次元が 2,3 の場合は，分類定理〔3；p438〕と Weinstein の結果〔19〕より分る。

コンパクトな場合と同様に，このRauchの問題が単連結で非負曲率をもつ非コンパクトな多様体に対しても成り立つかどうかという事は大変興味がある。更に同じく［7；p89］に述べてあるCohn-Vossenの結果：

「Mは2次元の非コンパクトで正のガウス曲率 K をもつリーマン多様体とした時，その全曲率に対し

$$\iint_M K\,dv \leqq 2\pi$$

がなり立つ。ここに dv はMの面積素である。」

に対し，Mが非負のガウス曲率をもつ場合に簡単な証明を与えられる事が分る。

定理［13］．Mは2次元の非コンパクトなリーマン多様体で非負のガウス曲率をもつとしたとき，その全曲率に対し

$$\iint_M K\,dv \leqq 2\pi$$

がなり立つ。

一般にリーマン多様体 M の点 p に対し，p からその cut locus への距離 $i(p) := d(p, C(p))$ を $\exp_p$ の injective-半径という。Toponogov は［18］において次の結果を得ている：

定理（Toponogov）．Mは非コンパクトなリーマン多様体とする。このとき

(1) もしMの断面曲率が $0 < K_\sigma \leqq \lambda$ を満たすなら，全ての点 $q \in M$ に対し，$i(q) \geqq \pi/\sqrt{\lambda}$

(2) もし $0 \leqq K_\sigma \leqq \lambda$ なら，定数 $L > 0$ が存在して，全ての点 $q \in M$ に対し　　$i(q) \geqq L$。

M がコンパクトな場合には，評価(1)は単連結，偶数次元の多様体に対して正しいのであるが，非コンパクトの場合には次元に関係なくなっているのが面白い。この(1)の結果に関し Karcher は [9] において，補題5 [7] におけるコンパクトな t.c.s. の族 $\{C_i\}_{i=1,2,\dots}$ をもちいて別証を与えている。そして Cheeger と Gromoll の結果をもちいれば Toponogov の評価(2)はある多様体に対しては，もう少し精密になる事が分る：

<u>定理[11]</u>. M は2次元の単連結，非コンパクトなリーマン多様体で，ガウス曲率が $0 \leqq K_\sigma \leqq \lambda$ を満たすとする。このとき全ての点 $q \in M$ に対し

$$i(q) \geqq \pi/\sqrt{\lambda} \ .$$

証明の方針。単連結より，M は E^2 に同位相となる。点 $q_0' \in M$ で $i(q_0') < \pi/\sqrt{\lambda}$ なるものが存在したとして矛盾をだす。$\{C_t\}_{t\geq 0}$ は q_0' から主題1.3の方法により得られたコンパクトな t.c.s. の族とする。$q_0 \in C_0$ は $i(q_0) = \min\{i(q) ; q \in C_0\}$ なる点とする。このとき測地線 $\gamma_0 : [0, 2i(q_0)] \to M$ で $\gamma_0(0) = \gamma_0(2i(q_0)) = q_0$ なるものがある。C_0 は t.c.s. だから $\gamma_0([0, 2i(q_0)]) \subset C_0$。従って $\gamma_0(i(q_0)) \in C_0$ からの同様な

考察により，γ_0は閉測地線である事が分る。$s\in M$はC_0より得られたMの soul としたとき，$i(s)\geq\pi/\sqrt{\lambda}$が容易に分る。そしてこの事実と，$i$の連続性，さらに$\{C_0^a\}_{a\geq 0}$が$C_0$の連続的な t.c.s. の filtration を与えている事により，点$q_1\in C_0$で

(1) $\pi/\sqrt{\lambda}>i(q_1)>i(q_0)$

(2) simple な閉測地線$\gamma_1:[0,2i(q_1)]\to M$で
$\gamma_1(0)=\gamma_1(2i(q_1))=q_1$

(3) $\gamma_0\wedge\gamma_1=\phi$

という条件を満たすものが存在する事が分る。そしてγ_0とγ_1とがかこむ単連結な領域にガウス－ボンネの定理を適用して$2i(q_0)=2i(q_1)$なる矛盾が導びかれる。

更にこの結果は3次元の場合にも正しい事が分った：

<u>定理[12]</u>. Mは3次元の単連結，非コンパクトなリーマン多様体で，その断面曲率が$0\leqq K_\sigma\leqq\lambda$を満たすとする。すると全ての点$q\in M$に対し

$$i(q)\geq\pi/\sqrt{\lambda}\text{。}$$

この結果は4次元以上に対しては正しくない事が Berger の例などから分る。従ってもし4次元以上の場合に試みるなら，単連結という仮定だけでは不十分なわけであり，例えばMがE^nに同位相などの条件のもとでは成り立つかも知れな

い。証明の方針を述べる。[11],[3]の結果から，本質的にはMがE^3に同位相の場合だけ示せばよい事が分る。$\{C_t\}_{t\geq 0}$は点$p\in M$より作られたコンパクトなt.c.s.の族とする。このとき点$q\in C_0$に対しては$i(q)\geq \pi/\sqrt{\lambda}$が2次元の場合に帰着されて示される。そして点$q_0\in M$で$i(q_0)<\pi/\sqrt{\lambda}$なるものが存在したとして矛盾を導く。2次元の場合と全く同じ手法により点列$\{q_i\}_{i=1,2,\cdots}$，それに閉測地線の族$\{\gamma_i\}_{i=1,2,\cdots}$と数列$\{t_i\}_{i=1,2,\cdots}$で次の条件を満たすものが存在する事が示される：

(1) $0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}<\cdots<t_0$

(2) $q_n\in \partial C_{t_0-t_n}$かつ
$\pi/\sqrt{\lambda}>\cdots>i(q_{n+1})>i(q_n)>\cdots>i(q_0)$

(3) $\gamma_n:[0,2i(q_n)]\to M$で$\gamma_n(0)=\gamma_n(2i(q_n))=q_n$

(4) $\dot\gamma_n(0)\to\exists\,\dot\gamma_\infty(0)$。

そして各nに対して，Mが3次元なる事とBergerの比較定理[1]をもちいて，Mに等長に，全測地的に埋め込まれた半シリンダーの族$\{F_n\}_{n=1,2,\cdots}$で以下の条件を満たすものが存在する事が示される：

(1) F_nは$\gamma_n([0,2i(q_n)])\times[0,\infty)$に等長

(2) $F_n\cap F_m=\phi$, $n\neq m$

(3) $F_n\to F_\infty$ as $n\to\infty$

ここに F_∞ は $\gamma_\infty(t) := \exp t\dot{\gamma}_\infty(0)$ なる閉測地線に対し $\gamma_\infty([0,2i(q_\infty)]) \times [0,\infty)$ に等長な全測地的部分多様体である。そしてこの性質(1),(2),(3)とMの次元が3なる事から矛盾が導びかれるのである。

以上いくつかのapplicationを示したが，非コンパクト，非負又は正の曲率をもつ多様体上の研究においては，このコンパクトなt.c.s.の族による多様体のfiltrationという概念はひじょうに有効な道具であると思う。問題によっては，非コンパクトな場合をコンパクトな場合へ帰着できるからである。

References

[1] M.Berger, An extension of Rauch's metric comparison theorem and some applications, Ill.J.of Math.6(1962), 700-712.

[2] R.L.Bishop and O'neill, Manifolds of negative curvature, Trans. of the Amer. Math. Soc. 145 (1969), 1-49.

[3] J.Cheeger and D.Gromoll, On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, Ann. of Math. 96 (1972), 413-443.

[4]_____, The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature, J.Diff. Geometry 6 (1971), 119-129.

[5] S.Cohn-Vossen, Kürzeste wege und Totalkrümmung auf Flächen, Copm. Math. 2 (1935), 69-133.

[6] P.E.Ehrlich, A minorization of the Convexity Radius

Function on the Space of Riemannian Metrics of a Compact Riemannian Manafold, preprint.

[7] D.Gromoll and W.Meyer, On complete open manifolds of positive curvature, Ann. of Math. 90 (1969), 75-90.

[8] K.Ii, Minimal submanifolds and convex functions, Tohoku Math. Journ. 24 (1972), 571-579.

[9] H.Karcher, Anwendungen der Alexandrowschen Winkelvergleichssätze, Manuscripta Math. 2 (1970), 75-90.

[10] M.Maeda, A note on noncompact Riemannian manifolds, Kodai Math. Sem. Rep. 25 (1973), 377-378.

[11] ______, On the injective radius of noncompact Riemannian manifolds, Proc. Jap. Acad. 50 (1974), 148-151.

[12] ______, On the injective radius of noncompact Riemannian manifolds II, to appear.

[13] ______, On the total curvature of noncompact Riemannian manifolds, to appear in Kodai Math. Sem. Rep.

[14] K.Shiohama, Minimal immersions of compact Riemannian manifolds in complete and non-compact Riemannian manifolds, Kodai Math. Sem. Rep. 22 (1970), 77-81.

[15] ______, On complete non-compact Riemannian manifolds with certain properties, Tohoku Math. Journ. 22(1970),76-94.

[16] I.A.Sokolenko, Triangles in Riemannian spaces with a pole, Soviet Math. Dokl. 1 (1960), 1171-1173.

[17] V.A.Toponogov, Spaces with straight lines, A.M.S. Translations 37 (1964), 287-290.

[18] ______, Theorems on shortest arcs in noncompact Riemannian spaces of positive curvature, Soviet Math. Dokl.11 (1970), 412-414.

[19] A.Weinstein, The cut locus and conjugate locus of a Riemannian manifold, Ann. of Math. 87 (1968), 29-41.

[20] Wu, A structure theorem for complete non-compact hypersurfaces of non-negatuve curvature, Bull. Amer. Math Soc. 77 (1971), 107o-1071.

[21] S.T.Yau, Non existence of Contineous Convex Functions ôn Certain Riemannian Manifolds, Math. Ann. 207 (1974), 269-270.