数理解析研究所講究録
第 221 巻 1974 年 47-57

現状と問題点, II

阪大理 内田伏一

コンパクト古典群の作用について今迄に知られていることをまとめてみた。

(1) 球面上の推移的かつ効果的な作用について.

参考文献 [1], [2], [3]

コンパクト連結 Lie 群 G が S^n に推移的かつ効果的に作用しているとする。

(a) n が偶数であれば, $G=SO(n+1)$ または, $n=6$ であって, $G=G_2$ である.

(b) n が奇数であれば, G は単純群であるかまたは, $G=G_{(1)}\times G_{(2)}$ と表わされ, $G_{(2)}=SO(2)$ または $Spin(3)$ であり, $G_{(1)}$ は S^n に推移的に作用する. G が単純群であれば, $G=SO(n+1)$, $SU(\frac{n+1}{2})$, および $n=4k-1$ のとき $Sp(k)$, $n=15$ のとき $Spin(9)$, $n=7$ のとき $Spin(7)$, に限る.

(2)　球面以外のコンパクト多様体上の推移的かつ効果的な作用について．　[19], [23], [25], [30], [36], [38], [45]

(a)　コンパクト連結 Lie 群 G が M に推移的かつ効果的に作用しているとする．

(i)　$M = SO(n)/SO(2k)\times SO(n-2k)$, $(2 < 2k < n-2)$ $\Rightarrow$ $G = SO(n)$.

(ii)　$M = Sp(n)/Sp(k)\times Sp(n-k)$, $(2 < k < n-2)$ $\Rightarrow$ $G = Sp(n)$.

(iii)　$M = G(n)/G(k)$,　$(G(k) = SO(k), SU(k), Sp(k))$.

$$(n,k) : (*) \quad \Rightarrow \quad G(n) \subset G \subset \underset{\text{左移動}}{G(n)} \times \underset{\text{右移動}}{G(n-k)}/\text{有限群}$$

但し，$(*)$:　$29 < k \leqq n-2$,　$2k > n+4$.

さらに　$k < n-2$　のときは，$k \not\equiv 0\ (4)$, $n \not\equiv 0\ (4)$.

(b)　とくに単純群の作用に限れば，$(*)$ より弱い条件の下で，*Stiefel* 多様体，*Grassmann* 多様体 等について研究されている（[19], [30]）．

(3)　*degree of symmetry* について．

[22], [28], [34], [35], [41], [47]

コンパクト可微分多様体 M に対して，

$$N(M) = \max\left\{ \dim G \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ はコンパクト Lie 群 } G \text{ の} \\ \text{効果的な可微分作用を許す} \end{array} \right\}$$

を，M の *degree of symmetry* と呼ぶ．

(a) 次の古典的な結果がある.

$$m = \dim M \Rightarrow N(M) \leq \frac{m(m+1)}{2},$$

$$N(M) = \frac{m(m+1)}{2},\ m = \dim M \Leftrightarrow M = S^m \text{ 又は } P_m(\mathbb{R}).$$

(b) (i) $N(P_n(\mathbb{C})) = \dim SU(n+1) = n^2+2n.$

(ii) $N(P_n(\mathbb{H})) = \dim Sp(n+1) = 2n^2+5n+3.$

(iii) $N(G(n)/G(k)) = \dfrac{d\cdot(k+1)}{2}\cdot \dim\big(G(n)/G(k)\big),$

但し, $2k \geqq n,\ k+1 = 2^a, (a \geqq 3)$

d	1	2	4
$G(n)$	$SO(n)$	$SU(n)$	$Sp(n)$

(c) (i) Σ^m: exotic homotopy m-sphere $(m \geqq 40)$

Kervaire sphere

$$\Rightarrow N(\Sigma^m) < \frac{1}{8}m^2+1,\quad N(\Sigma_0) = \frac{m^2+7}{8},\ (m \equiv 1\,(8)).$$

(ii) M : exotic homotopy $P_m(\mathbb{R})$, $(m \geqq 72)$

$$\Rightarrow N(M) < \frac{1}{8}m^2+1,\quad N(M_0) = \frac{m^2+7}{8},\quad \tilde{M}_0 = \Sigma_0.$$

(iii) M: exotic homotopy $P_m(\mathbb{C})$, $(m \geqq 13)$

$$\Rightarrow N(M) < \frac{m^2+3m+2}{2}.$$

(4) G多様体の分類について.

[15], [16], [17], [20], [24], [26], [27], [29], [39], [40], [42]

G作用のイソトロピー型等および多様体の位相的性質等に一定の条件を付加したときのG多様体の分類が種々研究されている.

(a) (Σ^m, Φ) を homotopy m-sphere 上の可微分 $SO(n)$-作用とする. $n \geq 9$, $m < 2n-1$ であれば, コンパクトで, 可縮な可微分 $(m-n+1)$-多様体 X が存在して,

$$(\Sigma^m, \Phi) = (\partial(D^n \times X), \Phi_1)$$

が成り立つ. h-cobordism によって, Σ^m は natural sphere.

(b) $SO(n)$-actions on homotopy m-spheres $(n \geq 11, m < 3n-6)$, $SU(n)$-actions on homotopy m-spheres $(n \geq 8, m < 6n-9)$, $Sp(n)$-actions on homotopy m-spheres $(n \geq 8, m < 12n-15)$, の分類が為されている([20], ch.V).

(c) $\Lambda(n) = O(n), U(n), Sp(n)$ とする. $\Lambda(n)$-作用が regular であるとは, 各点のイソトロピー群が $\Lambda(n-k)$ と共役 $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ なことである. regular $\Lambda(n)$-作用の分類やコボルディズム論が種々研究されている([24], [26], [27], [29], [39], [40]). 結果を記述するには, 準備を要するので省略する.

注 (ℓ) の問題等を考える際，多様体 M の Pontrjagin 類 $p_1(M)=0$ であることによって，現われるイソトロピー型の可能性をかなり消去できる，という論法がとられている。これについて簡単な例を挙げて説明しておこう。

$p_1(M)=0$ である多様体 M が可微分 $SU(n)$ 作用を許し，principal isotropy type $(SU(n-1))$ をもつとする．このとき，共役類 $(NSU(n-1))$ はイソトロピー型として現われず。

$(\because)$ $(NSU(n-1))$ がイソトロピー型として現われたとして，スライス表現を考える．$SU(n)/NSU(n-1)=P_{n-1}(\mathbb{C})$ であり，

$$A\in SU(n),\ ASU(n-1)A^{-1}\subset NSU(n-1) \Rightarrow A\in NSU(n-1),$$

であるから，スライス表現 $\rho: NSU(n-1)\longrightarrow O(k)$ において，$\rho\,|\,SU(n-1)$ は自明である．故に，

$$\begin{tikzcd}
NSU(n-1) \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "proj."'] & \circlearrowleft & O(k) \\
& NSU(n-1)/SU(n-1)\cong S^1 . \arrow[ur, "\exists\sigma:\ hom."'] &
\end{tikzcd}$$

従って，$P_{n-1}(\mathbb{C})$ 上の canonical complex line bundle を η とするとき，embedding $P_{n-1}(\mathbb{C})=SU(n)/NSU(n-1)\hookrightarrow M$ の法ベクトル束 ν は，

$$\nu\cong\eta^{\otimes a_1}\oplus\cdots\oplus\eta^{\otimes a_r}\oplus\underline{R}^{\ell}\qquad(a_i\in\mathbb{Z})$$

と表わされ，

$$p_1(\tau M\,|\,P_{n-1}(\mathbb{C}))=(n+a_1^2+\cdots+a_r^2)\alpha^2\neq 0,$$

但し，$\alpha \in H^2(P_{n-1}(\mathbb{C});\mathbb{Z})$ は生成元，となって，$p_1(M)=0$ と矛盾する。（終）

（5） *principal isotropy types* の決定について，

[21]，[32]，[33]，[46]

G-作用が与えられたとき，多様体 M の位相的性質に制限を付けて，*principal isotropy types* として現われる可能性のあるものをすべて見出しておくことは，大変重要なことである。

[21]．G の線型作用について，$G=SO(n)$, $SU(n)$ の場合について研究している。　例えば次の結果がある．

φ を $SO(n)$, $(n\geq 8)$ の実表現とし，(H_φ) を *principal isotropy type* とする．$\dim H_\varphi \neq 0$ であれば，

(i) $\varphi = k\cdot\rho_n \oplus$ *trivial summand*，$k<n-1$，$H_\varphi = SO(n-k)$，

(ii) $\varphi = Ad_{SO(n)} \oplus$ *trivial summand*，H_φ: *max. torus of* $SO(n)$，

のいずれかである．ここに ρ_n は $SO(n)$ の n 次元の標準的な表現である．

[32]，[33]，[46]．R^n，Σ^n，*acyclic* 多様体等の上のコンパクト連結古典群の作用について，*principal isotropy types* を決定している。

おわりに.

上記 (1) ～ (5) において, 文献番号の下に波線をつけたものは, その方面の研究に際して基礎知識を与えてくれるものである。　コンパクト変換群について, 勉強を始めようという人は, その好みに応じて, [27], [37], [44] 等を眺めてみると良いと思う。

上記 (1) ～ (5) において, 今後トポロジストのくい込む余地の大きいのは (4) であるが, (3) についても (c) の方面は微分トポロジストの活躍が期待されると思う。

文献表

[1] D.Montgomery-H.Samelson: Transformation groups on spheres, Ann.Math.44(1943),454-470.

[2] A.Borel: Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori, Bull.AMS.55(1949),580-586.

[3] A.Borel: Le plan projectif des octaves et les spherès comme espaces homogènes, C.R.Acad.Sci.230(1950),1378-1380.

[4] A.Borel: Transformation groups with two classes of orbits, Proc.Nat.Acad.Sci.USA.43(1957),983-985.

[5] A.Borel-F.Hirzebruch: Characteristic classes and homogeneous spaces I,II,III, Amer.J.Math.80(1958),459-538; 81(1959), 351-358; 82(1960),491-504.

[6] D.Montgomery-C.T.Yang: Groups on S^n with principal orbits of dimension n-3, I,II, Illinois J.Math.4(1960),507-517; 5(1961),206-211.

[7] H.C.Wang: Compact transformation groups of S^n with an (n-1)-dimensional orbit, Amer.J.Math.82(1960),698-748.

[8] G.E.Bredon: Transformation groups with orbits of uniform dimension, Michigan Math.J.8(1961),139-147.

[9] D.Montgomery-H.Samelson: Examples for differentiable group actions on spheres, Proc.Nat.Acad.Sci.USA.47(1961),1202-1205.

[10] P.E.Conner-D.Montgomery: An example for SO(3), Proc.Nat.Acad.Sci.USA.48(1962),1918-1922.

[11] D.Montgomery-H.Samelson: On the action of SO(3) on S^n, Pacific J.Math.12(1962),649-659.

[12] D.Montgomery-C.T.Yang: A theorem on the action of SO(3), Pacific J.Math.12(1962),1385-1400.

[13] C.T.Yang: On the action of SO(3) on a cohomology manifold, Pacific J.Math.13(1963),353-359.

[14] G.E.Bredon: Transformation groups on spheres with two types of orbits, Topology,3(1965),103-113.

[15] W.C.Hsiang-W.Y.Hsiang: Classification of differentiable actions on S^n,R^n and D^n with S^k as the principal orbit type, Ann.Math.82(1965),421-433.

[16] W.Y.Hsiang: On the classification of differentiable SO(n) actions on simply connected π-manifolds, Amer.J.Math.88(1966), 137-153.

[17] K.Jänich: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand als Orbiträume differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten ohne Rand, Topology,5(1966),301-320.

[18] L.N.Mann: Gaps in the dimensions of transformation groups, Illinois J.Math.10(1966),532-546.

[19] A.L.Oniščik: Transitive compact transformation groups, Amer.Math.Soc.Translation,55(1966),153-194.

[20] W.C.Hsiang-W.Y.Hsiang: Differentiable actions of compact connected classical groups I, Amer.J.Math.89(1967),705-786.

[21] W.Y.Hsiang: On the principal orbit type and P.A.Smith theory of SU(p) actions, Topology,6(1967),125-135.

[22] W.Y.Hsiang: On the bound of the dimensions of the isometry groups of all possible riemannian metrics on an exotic sphere, Ann.Math.85(1967),351-358.

[23] A.L.Oniščik: On Lie groups transitive on compact manifolds II,III, Math.USSR.Sb.3(1967),373-388; 4(1968),233-240.

[24] F.Hirzebruch-K.H.Mayer: O(n)-Mannigfaltigkeiten,Exotische Sphären und Singularitäten, Lecture Notes in Math.57(1968), Springer-Verlag.

[25] W.Y.Hsiang-J.C.Su: On the classification of transitive actions on Stiefel manifolds, Trans.AMS.130(1968),322-336.

[26] K.Jänich: On the classification of O(n)-manifolds, Math.Ann. 176(1968),53-76.

[27] K.Jänich: Differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten, Lecture Notes in Math.59(1968),Springer-Verlag.

[28] H.T.Ku-L.N.Mann-J.L.Sicks-J.C.Su: Degree of symmetry of a product manifold, Trans.AMS.146(1969),133-149.

[29] C.Lazarov-A.Wasserman: Cobordism of regular O(n)-manifolds, Bull.AMS.75(1969),1365-1368.

[30] A.L.Oniščik: Lie groups transitive on Grassmann and Stiefel manifolds, Math.USSR.Sb.12(1970),405-427.

[31] P.E.Conner-F.Raymond: Actions of compact Lie groups on aspherical manifolds, "Topology of Manifolds" (1970),227-264.

[32] W.C.Hsiang-W.Y.Hsiang: Differentiable actions of compact connected classical groups II, Ann.Math.92(1970),189-223.

[33] R.W.Sullivan: Differentiable actions of classical groups on spheres, Topology,9(1970),155-167.

[34] W.Y.Hsiang: On the degree of symmetry and the structure of highly symmetric manifolds, Tamkang J.Math.2(1971),1-22.

[35] H.T.Ku-L.N.Mann-J.L.Sicks-J.C.Su: Degree of symmetry of a homotopy real projective space, Trans.AMS.161(1971),51-61.

[36] H.Scheerer: Transitive actions on Hopf homogeneous spaces, Manuscripta Math.4(1971),99-134.

[37] G.E.Bredon: Introduction to compact transformation groups, Academic Press (1972).

[38] K.Abe-T.Watabe: A note on transitive and irreducible action on the Stiefel manifold $V_{n,n-2}$, Sci.Rep.Niigata Univ.9(1972), 9-16.

[39] D.Erle-W.C.Hsiang: On certain unitary and symplectic actions with three orbit types, Amer.J.Math.94(1972),289-308.

[40] C.Lazarov-A.Wasserman: Cobordism of U(n)-actions, Bull.AMS. 78(1972),1035-1038.

[41] V.Schneider: Degree of symmetry of Stiefel manifolds, Duke Math.J.39(1972),285-288.

[42] E.A.Grove: SU(n)-actions on manifolds with vanishing first and second integral Pontrjagin classes, Proc.second Conf. compact Transf.Groups,part I,298(1972),324-333,Springer-Verlag.

[43] G.E.Bredon: Regular O(n)-manifolds,suspension of knots,and knot periodicity, Bull.AMS.79(1973),87-91.

[44] C.Lazarov-A.Wasserman: Complex actions of Lie groups, Memoirs of AMS.137(1973).

[45] V.Schneider: Transitive actions on highly connected spaces, Proc.AMS.38(1973),179-185.

[46] W.C.Hsiang-W.Y.Hsiang: Differentiable actions of compact connected Lie groups III, Ann.Math.99(1974),220-256.

[47] T.Watabe: On the degree of symmetry of complex quadric and homotopy complex projective space, Sci.Rep.Niigata Univ. 11(1974),85-94.

//