数理解析研究所講究録
第 223 巻 1974 年 7-10

フィッシャーの情報量と正規分布

統数研　　清水良一

1.　$f(x)$ は連続な導関数をもつ密度関数で、$|x| \to \infty$ のとき、$xf(x) \to 0$ を満たすとする．また平均 0、分散 σ^2 として，location family $\Lambda = \{f(x-\theta)\}$ を考える．Λ にたいするフィッシャーの情報量 $I(\Lambda)$ は、

$$I = I(\Lambda) = E\left(\frac{\partial \log f(X-\theta)}{\partial \theta}\right)^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\,dx$$

で与えられ、θ に無関係である．

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma^2 f'(x) + xf(x))^2}{\sigma^2 f(x)}\,dx$$

とおくと，よういに

$$J = \sigma^2 I(\Lambda) - 1 \quad \geq 0$$

が得られる．等号がなりたつのは、すなわち、$I(\Lambda)$ が最小になるのは、明らかに $f(x)$ が $N(0, \sigma^2)$ のときである

．この性質，すなわち、フィッシャー情報量が最小になるという正規分布の特徴的な性質は、次の意味で安定である：フィッシャー情報量が小さければ、f の分布は $N(0, \sigma^2)$ に近い．

定理　f は上に述べた条件をみたすとする．次の不等式がなりたつ．

$$\sup_x |f(x) - \phi(x)| \leq 1.7\sqrt{J} ,$$

$$\sup_x |F(x) - \Phi(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \phi(x)|\, dx \leq 3.2\sqrt{J} .$$

$F(x)$ は f の分布関数、$\phi(x)$, $\Phi(x)$ はそれぞれ $N(0,1)$ の密度関数、分布関数である．

2.　f は前節の条件をみたすとする．F からの大きさ n の標本の normalized sum の密度関数を $f_n(x)$ とする．
$f_n(x) = \sqrt{n}\, f^{*n}(\sqrt{n}\, x)$．　location family
$\Lambda_n = \{ f_n(x - \theta) \}$　のフィッシャー情報量 I_n は、

$$I_n = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f^{*n\prime}(x))^2}{f^{*n}(x)}\, dx$$

で与えられ、

$$nI_n \leqq mI_m + (n-m)I_{n-m}, \qquad n > m.$$

$$\sigma^{-2} \leqq I_{n,m} \leqq I_n.$$

を満足する．　とくに．

$$a_p = \lim_{n\to\infty} I_{pn} \geqq \sigma^{-2}, \qquad p=1, 2, \cdots$$

が存在する．

3.　$Y_1, \cdots, Y_n$ が平均 0，分散 $\sigma^2 (=1)$ の分布 G からの標本とする．　$Z_1, \cdots, Z_n$ を Y とは独立な $N(0, 1)$ からの標本として，

$$X_j = (Y_j + Z_j)/\sqrt{2}, \qquad j=1, \cdots, n$$

とおく．　$Y_1, \cdots, Y_n$ の normalized sum の分布を G_n とすると，$X_1, \cdots, X_n$ の normalized sum は密度，

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{2}x - y)^2/2} \, dG_n(y)$$

をもつ．

$f_n'^2(x)/f_n(x)$ が可積分関数 $g(x) = \min(4, 4/x^2)$ より大きくならないこと，および、location family にたいする十分統計量が、標本平均なら、その family は正規であることを使って，$a_p = 1, \quad p=2, 3, \cdots$ が得られる．また、これから

$$\lim I_n = 1,$$

すなわち，　f_n が，あるいはその分布が $N(0,1)$ に近づくことがでる．　これから　$G_n \Longrightarrow \Phi$　、すなわち、最も単純な場合の中心極限定理が導かれる．