数理解析研究所講究録
第 223 巻 1974 年 11-18

或種の関数方程式と正規分布の特徴づけ
(Linnik-Zinger の定理の証明要約)

東工大 理学部数学科 間瀬茂

Linnik (1953) は二つの線型統計量

$$L_1 = a_1X_1+\cdots+a_nX_n,\ L_2=b_1X_1+\cdots+b_nX_n$$

$(X_1,\cdots,X_n$ は i.i.d. で分布 F に従う$)$ (1)

について、二つの性質

(I) L_1 と L_2 は同分布に従う、 (2)

(II) F は正規分布に従う、

が同値となるための条件を調べた。F の特性関数 $f(t)$ を用いれば、これは関数方程式

$$\prod_{j=1}^{r} f(a_j t) = \prod_{j=1}^{r} f(b_j t) \tag{3}$$

の特性関数解が $f(t)=\exp(i\alpha t-\beta^2t^2)$ の形のみになるための条件を求める問題となる。

一方 Ramachandran & Rao (1968) は (F の期待値 $=0$ の仮定下で) constant regression

$$E\{L_1 \mid L_2\}=0 \tag{4}$$

が成立するような分布Fについて考えた。(4)は特性関数を用いると，次の形の関数方程式に帰着される。

$$\prod_{j=1}^{r} f^{\lambda_j}(a_j t) = \prod_{j=1}^{r} f^{\mu_j}(b_j t). \qquad (5)$$

(3), (5)の形の関数方程式は，原点 $t=0$ の近傍で $w(t) \equiv \log f(t)$ を考えることにより，それぞれ

$$\sum_{1}^{r} w(a_j t) = \sum_{1}^{r} w(b_j t),\ |t|<t' \qquad (6)$$

$$\sum_{1}^{r} \lambda_j w(a_j t) = \sum_{1}^{r} \mu_j w(b_j t),\ |t|<t' \qquad (7)$$

に帰着される。Zinger (1969) は(6), (7)を更に一般化し，次の形の関数方程式を扱った。

$$\int_{-a'}^{a'} w(at)\,dV_{I}(a) = \int_{-a'}^{a'} w(bt)\,dV_{II}(b). \qquad (8)$$

ここで V_I, V_{II} は $[-a', a']$ 上の有界測度。

以下では，(8)が $w(t)=\log f(t)$, $f(t)$ は特性関数，の形の解を持つための（特に $f(t)$ が正規分布の特性関数になる）ための条件を V_I, V_{II} について求める。先ず V_I, V_{II} に関する基本的仮定を置く。

i) $\int_{-a'}^{a'} |a|^{-\delta} d\{V_I(a) + V_{II}(a)\} < \infty$. $\exists \delta > 0$.

ii) dV_{II} は $a=a'$ で jump を持ち，$\exists a_1 < a'$ で

$$\int_{a_1}^{a'} dV_I(a) = 0 \text{。}$$

(Linnik の場合，ii)は $\sup|a_j| \neq \sup|b_j|$)。

仮定 i) は(8)に Laplace 変換を施すために必要となり，仮定 ii) は，(8)が全ての実数 t で成り立つことを保証する。

正規分布の特徴づけでは，特に(8)の実部を考えるだけで充分である。$\phi(t)=\mathrm{Re}\,w(t)$ とおくと，(8)は新しい測度 V_1, V_2 を用いて

$$\int_{-a'}^{a'}\phi(a t)dV_1(a)=\int_{-a'}^{a'}\phi(a t)dV_2(a),\quad |t|<t' \tag{9}$$

と書くことができる。変数変換により $a'=t'=1$ と標準化した後

$$\chi(\tau)=\phi(e^{-\tau}),\ \tilde{V}_j(\alpha)=-V_j(e^{-\alpha}),\ 0<\tau,\alpha<\infty$$

と置けば，(9)は次の形となる。

$$\int_0^\infty \chi(\tau+\alpha)d\tilde{V}_1(\alpha)=\int_0^\infty \chi(\tau+\alpha)d\tilde{V}_2(\alpha),\ \tau>0 \tag{9'}$$

(9')の両辺のLaplace変換を考えると，$\mathrm{Re}\,z<\delta$ で

$$\int_0^\infty\left[\int_\alpha^\infty e^{-z(\tau-\alpha)}\chi(\tau)d\tau\right]d\left\{\tilde{V}_1(\alpha)-\tilde{V}_2(\alpha)\right\}=0。 \tag{10}$$

次の記号を導入すると

$$\sigma(z)=\int_0^\infty e^{z\alpha}d\{\tilde{V}_2(\alpha)-\tilde{V}_1(\alpha)\}, \tag{11}$$

$$\mathcal{X}(z)=\int_0^\infty e^{-z\tau}\chi(\tau)d\tau,$$

$$K(z)=\int_0^\infty e^{z\alpha}\left[\int_0^\alpha e^{-z\tau}\chi(\tau)d\tau\right]d\{\tilde{V}_1(\alpha)-\tilde{V}_2(\alpha)\},$$

(10)は $\sigma(z)\mathcal{X}(z)+K(z)=0,\ 0<\mathrm{Re}\,z<\delta$ (12)

と書くことができる。

(12)とLaplace逆変換の公式から，$\forall\lambda>0$ で

$$\int_\tau^\infty(v-\tau)e^{-\lambda v}\chi(v)dv=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{\tau(z-\lambda)}\frac{K(z)}{(z-\lambda)^2\sigma(z)}dz \tag{13}$$

$$0 < x' < \min(\delta, \wedge)。$$

$K(z)/\sigma(z)$が全複素平面で高々$\sigma(z)$の零点を除いて，有理型関数であることに注目し，(13)の右辺の積分路をCauchyの定理により移動することにより，$\sigma(z)$（これはV_I, V_{II}のみに依存して定る）の零点における(13)の右辺の被積分関数の留数で，右辺を表現できることになる。

(13)の左辺をも変形することにより，基本的展開，

$$\int_0^t u^{\wedge-1} \log(t/u)\phi(u)du = \pi(t) + \sum_0^\infty S_n(t) + R(t), \qquad (14)$$

を得る。ここで$\sum S_n(t)$は，$\sigma(z)$の複素零点ξに対する留数（共役な対であらわれる）の和で

$$t^\wedge \{ t^\xi P_\xi(\log t) + \overline{t^\xi P_\xi(\log t)} \}$$

の形の項の和。$\pi(t)$は$\sigma(z)$の実零点に対する

$$t^\wedge t^\gamma P_\gamma(\log t)$$

の形の項の和，$R(t)$は剰余項である。又P_ξ, P_γは多項式。展開(14)に於て非負留数を持つような$\sigma(-z)$の零点をactive exponentと呼び，active exponent全体の実部のinf，supをそれぞれσ_1, σ_2とおく。又実数でないactive exponent全体の実部のinf，supをそれぞれσ_3, σ_4とおく。

展開(14)を基礎に，$\phi(t)$が非負，連続，原点で0等の性質を援用し，漸近的な解析を様々に施すことにより，次の

基本的結果を得る。

① σ_1 は active exponent。$\sigma_1 \leqq 2$ は正数。多項式 P_{σ_1} の最高次係数 $a_{0\sigma_1}$ とその degree m_{σ_1} の間には関係

$$(-1)^{m_{\sigma_1}} a_{0\sigma_1} > 0 。$$

② $\phi^{(n)}(t)$ が存在し、原点で連続なら（つまり F の n 次のモーメントが存在すれば）$\sigma_3 \geqq n$。

③ σ_2 は有限で active exponent。多項式 P_{σ_2} の最高次係数 $a_{0\sigma_2}$ は

$$a_{0\sigma_2} > 0 。$$

④ $\sigma_1 = 2$ で $\deg P_{\sigma_1} = 0$ とする。もし実数でない active exponent が存在すれば、実の active exponent s で、同時に、偶数かつ $\deg P_s = 0$、でないものが存在し

$$2 < s < \sigma_3 。$$

そのような s のうち最少のものを s_1 とすると、多項式 P_{s_1} の最高次係数 a_{0s_1}, $\deg P_{s_1} = m_{s_1}$, $g = [1 - s_1/2]$ の間には

$$(-1)^{g + m_{s_1}} a_{0s_1} > 0 。$$

(8) の解が正規分布の特性関数の対数に限られるかどうかという最終的結論を出すための、基本的理念は、もし $\phi(t)$ が正規分布の特性関数の実部であれば、展開 (14) に於て、active exponent は $\sigma_1 = 2$ のみであり、しかも $\deg P_{\sigma_1} = 0$ となり、逆も又真であることにある。

一方Marcinkiewiczの定理（exp（多項式）の形の特性関数は正規分布のそれのみ）を用いれば，結局展開(14)に於て，active exponentはすべて偶数に限られ，しかも対応する多項式はすべて deg = 0 であることを示せば良いことになる。

他方における困難さは，$\sigma(-z)$の全ての零点がactive exponentでなく，展開(14)にあらわれるのはその（予め特定できぬ）一部のみであることにある。従って $\sigma(-z)$ の零点に関する幾つかの条件を組み合せて，性質①，②，③，④を繰りかえし用いて，$\sigma(-z)$の active exponent が偶数に限られ，しかも対応する多項式の deg = 0 となるようにすることが問題となる。

<u>定理（Linnik-Zinger）</u> 仮定 i)，ii) の下で I，II が同値となるための必要十分条件は，次の5条件が満足されることである。

1) $\int_{-a'}^{a'} a\,dV_{I}(a)=\int_{-a'}^{a'} a\,dV_{II}(a)$，

2) $\sigma(-2)=0$，ここで $\sigma(z)=\int_{-a'}^{a'}\left|\frac{a}{a'}\right|^{z} d\{V_{I}(a)-V_{II}(a)\}$。

3) $\sigma(-z)$の正根で，偶数 $\equiv 2 \pmod 4$ であるものは高々重複度 = 2。もし重複度 = 2なら，それは全ての正根中最大。

4) $\sigma(-z)$ の正根で，偶数 $\equiv 0 \pmod 4$ であるものは重複度 = 1。

5) $\sigma(-z)$ の正根で，偶数でないものがあれば，重複度

$=1$ で，全ての正根中最大で $[s/2]$ は奇数。

注。定理の必要部分の証明には適当な仮定の下で

$$f_1(t)=\exp[-At^2-A_1|t|^{\delta_1}\{\log|t|\}^m],$$

$$f_2(t)=\exp[-At^2-|t|^{\delta_1}P(\log|t|)-|t|^{\delta_2}]$$

P は polynomial，

が特性関数になることを用いる。

Ramachandran & Rao による constant regression の問題，(4)，に於ては，先ず分布 F が無限分解可能であることが導かれ，その Lévy 標準表現を関数方程式 (7) に代入することにより問題は分布 F の Poisson スペクトル測度に関する関数方程式に帰着される。それに前述した Linnik の方法を応用すると，$\sigma(-z)$ の零点が全て一直線 $Re\,z=\exists\lambda$ 上に集中しているという幸運な事情があるため完全な解析が可能となる。このことは，異った関連で特殊な場合 Shimizu (1968) により取り扱われ，解決されている。

(4) に於て $|b_n|=\max|b_j|$，$a_n\neq 0$ と仮定し

$$\beta_j=b_j/b_n,\quad \delta_j=a_jb_n/(a_nb_j)$$

とおく。

定理（Ramachandran & Rao）丁度k個のβ_jが互いに異り，又± 1とも異っているとする（$\beta_1, \cdots, \beta_k$がそうであるとしてよい）。$j=1, 2, \cdots, k$で

$$\varepsilon_j = \sum \{\alpha_i ; \beta_i = \beta_j\}, \quad \varepsilon_0 = \sum \{\alpha_i ; \beta_i = 1\}$$

$$\varepsilon_0' = \sum \{\alpha_i ; \beta_i = -1\}$$

とおく。$\varepsilon_0' = 0$で，$\gamma_i = \varepsilon_i / (1-\varepsilon_i) > 0$, $i=1, \cdots, k$, λを方程式 $\sum_1^k \gamma_i |\beta_i|^\lambda = 1$ の（唯一の）解とすると

i）$\lambda \leq 1$ なら，又 $\lambda > 2$ ならFは退化分布。

ii）$\lambda = 2$ なら，Fは正規分布。

iii）$1 < \lambda < 2$ ならFはある無限分解可能分布に従う。

注。場合 iii）では更にλの値とベクトル（$\log|\beta_1|, \cdots, \log|\beta_k|$）の性質に基き，Fの従う無限分解可能分布のLévy標準表現についての性質が求められる。