数理解析研究所講究録
第 224 巻 1974 年 1-19

On the Orr-Sommerfeld type equations

東工大 理　西本敏彦

§1 Introduction

非圧縮、粘性流体の平行流の安定性を論ずる際に現われる基本的な方程式は次の Orr-Sommerfeld equation 及びその adjoint equation である：

$$(1.1)\qquad \frac{1}{\alpha R}\left(\frac{d^2}{dx^2}-\alpha^2\right)^2\varphi - i\left\{(u(x)-c)\left(\frac{d^2}{dx^2}-\alpha^2\right)\varphi - u''(x)\varphi\right\}=0$$

$$(1.2)\qquad \frac{1}{\alpha R}\left(\frac{d^2}{dx^2}-\alpha^2\right)^2\varphi - i\left\{(u(x)-c)\left(\frac{d^2}{dx^2}-\alpha^2\right)\varphi + 2u'(x)\frac{d\varphi}{dx}\right\}=0$$

但し $u(x)$ は与えられた関数，α と R は実パラメータ，c は複素パラメータである．

ここでは、これらよりやや一般な形の次の方程式＝これを Orr-Sommerfeld type equation と呼ぶことにする＝の解の $\varepsilon=(\alpha R)^{-\frac{1}{2}}\to 0$ の時の漸近展開を研究する：

$$(1.3)\qquad \varepsilon^2\frac{d^4\varphi}{dx^4} - p_3(x\,\varepsilon)\frac{d^2\varphi}{dx^2} - p_2(x\,\varepsilon)\frac{d\varphi}{dx} - p_1(x\,\varepsilon)\varphi = 0$$

$$p_i(x\,\varepsilon) = \sum_{k=0} p_{ik}(x)\varepsilon^k \quad , \quad p_{ik}(x) \text{ analytic} \;,\quad p_{30}(x) \not\equiv 0,$$

for

$x \in D$ bounded region , $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0$.

よく知られているように $p_{30}(x) = 0$ をみたす点を変り点（turning point）といい，解の漸近展開は変り点において複雑となる。

Prof. Wasow は turning point problem に関していくつかの重要な論文を発表されたけれども、特に次に記す論文は Orr-Sommerfeld equation に関するもので simple turning point の近傍における解の漸近的性質をほぼ完全に解明した：

1. W. Wasow The complex asymptotic theory of a fourth order diff. equation of hydrodynamics. Ann. of Math. 49 (1948)
2. 〃 Asymptotic solution of the diff. equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point. Ann. of Math. 58 (1953)

ここで用いられた方法は、いわゆる related equation method 又は comparison method と呼ばれるもので、それは与えられた方程式を適当な変換で簡単にする、そしてその簡単化された方程式を何らかの方法、例えば Laplace 積分によって解くとい

うものである．同様な方法で以て．Lin-Rabenstein は方程式 (1.3) の simple turning point の近傍において解の漸近理論を得た：

3. Lin-Rabenstein On the asymptotic theory of a class of Ordinary Diff. equations of fourth order I. Trans. Amer. Math. Soc. 94 (1960)
II. Studies in App. Math. 48 (1969)

一方これらより前に C. C. Lin は Orr-Sommerfeld equation の漸近解を matching method を用いて求めることにより当時不明確であった平行流の安定性の問題に決定的な貢献をした：

4. C. C. Lin On the stability of two dimensional parallel flows I, II, III Quarterly of App. Math. 3 (1946).

Matching method というのは 2つの異なった regions において各々漸近展開がえられ、もし 2つの regions が overlap しているならばそこで 2の漸近展開の関係を計算する方法でいわば 1つの接続方法である。Matching method を数学的に厳密に用いた最初の論文は

5. W. Wasow A turning point problem for a system of two linear differential equations. J. Math. Phys. 38 (1959).

又 (1.1) ~ (1.3) の形の方程式に関しては

6. T. Nishimoto A turning point problem of an n-th order diff. equation of hydrodynamic type. Kōdai Math. Sem. Rep. 20 (1968)。

さて今までのべたことは、1つの turning point の近傍における漸近理論でありいわば local theory である。これに対して global なものとしては、方程式 (1.1) において $u(x)=x$ の場合に Prof. Wasow が全平面で漸近展開を求めたものが唯一である：

7. W. Wasow On small disturbances of plane Couette flow. J. Res. Nat. Bur. Standards B51 (1953)

物理学上の問題の中には考える領域内に2つ以上の turning points が起る場合があるが、物理学者は C.C.Lin の手法を手本として、Matching method と数値計算により実務的に問題を処理している。

そこで我々は方程式 (1.3) に対し次のような問題を考える：

$p_i(x\,\varepsilon)$ $(i=1.2.3)$ 及び有界領域 D に適当な条件を付し D で解の漸近展開を求めること.

ここでは、簡単のため $p_i(x\,\varepsilon)$ を x の多項式とし，かつ各 turning point において one segment condition をみたすとする.

このことは (1.3) の reduced equation

$$(1.4)\qquad p_3(x\,0)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+p_2(x\,0)\frac{d\varphi}{dx}+p_1(x\,0)\varphi=0$$

は turning point を確定特異点としてもつことを意味する。

§2 turning point を含まない領域における漸近展開

(1.3) は $y_1 = \varphi_1$ $y_2 = \varphi'$ $y_3 = \varphi''$ $y_4 = \varepsilon\varphi^{(3)}$ とおくことにより 4 連立微分方程式系となる：

$$(2.1)\quad \varepsilon Y' = P(x\,\varepsilon)Y \quad \text{with } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \quad P(x\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_1(x\varepsilon) & p_2(x\varepsilon) & p_3(x\varepsilon) & 0 \end{bmatrix}$$

Block diagonalization.

$$U = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_3 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと (2.1) は次のようにかける.

$$(2.1)\quad \varepsilon \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

Transformation 1

$$\left.\begin{aligned} U &= U_1 \\ V &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{p_{30}(x)} \end{bmatrix} V_1 \end{aligned}\right\} \to \varepsilon \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

ここで $A_1 = A$ $B_1 = B$ $C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{p_1}{\sqrt{p_{30}}} & \dfrac{p_2}{\sqrt{p_{30}}} \end{bmatrix}$ $D_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{p_{30}} \\ \dfrac{p_3}{\sqrt{p_{30}}} & \dfrac{p_{30}'}{2p_{30}}\varepsilon \end{bmatrix}$

Transformation 2

E を 2-2 unit matrix, Q, R を 2-2 matrix として変換

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E+\varepsilon QR & \varepsilon Q \\ R & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & -\varepsilon Q \\ -R & E+\varepsilon RQ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

により

$$\varepsilon \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

但し

$$A_2 = A_1 + B_1 R - \varepsilon Q(C + D_1 R) + \{\varepsilon A_1 QR - \varepsilon^2 QC_1 QR - \varepsilon^2 Q'R\}$$

$$B_2 = B_1 - \varepsilon QD_1 + \{\varepsilon A_1 Q - \varepsilon^2 QC_1 Q - \varepsilon^2 Q'\}$$

$$C_2 = C_1 + D_1 R + \{-RA_1 + \varepsilon C_1 QR - R(B_1 - \varepsilon QD_1)R + \varepsilon RQC_1 - \varepsilon R'\}$$
$$- \{\varepsilon RA_1 QR - \varepsilon^2 RQC_1 QR - \varepsilon^2 RQ'R\}$$

$$D_2 = D_1 + \{-R(B_1 - \varepsilon QD_1) + \varepsilon C_1 Q\} - \{\varepsilon RA_1 Q - \varepsilon^2 RQC_1 Q - \varepsilon^2 RQ'\}$$

ここで C_1, D_1 を ε の巾級数に展開しておき

$$Q = \sum_{i=0} Q_i(x)\,\varepsilon^i \qquad R = \sum_{i=0} R_i(x)\,\varepsilon^i$$

を $B_2 \sim 0$, $C_2 \sim 0$ となるようにきめる。例えば

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_{30}^{-1/2} \end{bmatrix} \qquad Q_1 = \begin{bmatrix} p_{30}^{-1} & 0 \\ \dfrac{p_{30}' - 2p_{20}}{2p_{30}^2} + \dfrac{p_{30}'}{2p_{30}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} -\dfrac{p_{10}}{p_{30}} & -\dfrac{p_{20}}{p_{30}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ととれば

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{-p_{10}}{p_{30}} & -\dfrac{p_{20}}{p_{30}} \end{bmatrix} \varepsilon + \cdots$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{p_{30}} \\ \sqrt{p_{30}} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{p_{31}}{\sqrt{p_{30}}} & \dfrac{p_{20}}{p_{30}} - \dfrac{p_{30}'}{2p_{30}} \end{bmatrix} \varepsilon + \cdots$$

こうしておけば、更にD_2を対角化することにより形式解が容易にえられる。変換をもどして最初の方程式(2.1)の解が得られるが leading term をかくと

(2.2) $$Y(x,\varepsilon)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}\,p_{30}}\varepsilon^2 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}\,p_{30}}\varepsilon^2 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{\sqrt{2 p_{30}}}\varepsilon & \dfrac{1}{\sqrt{2 p_{30}}}\varepsilon \\ -\dfrac{p_{10}}{p_{30}} & -\dfrac{p_{20}}{p_{30}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & \sqrt{\dfrac{p_{30}}{2}} & \sqrt{\dfrac{p_{30}}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0(x) & 0 \\ 0 & V_0(x\,\varepsilon) \end{bmatrix}$$

但し $U_0(x)$は . reduced equation (1.3) の基本解とし，又V_0は

$$V_0(x\,\varepsilon) = p_{30}^{-1/4} \begin{bmatrix} \exp\displaystyle\int^x \left\{\frac{\sqrt{p_{30}}}{\varepsilon} + \frac{p_{31}}{2\sqrt{p_{30}}} + \frac{p_{20}}{2p_{30}}\right\} dx & 0 \\ 0 & \exp\displaystyle\int^x \left\{\frac{-\sqrt{p_{30}}}{\varepsilon} - \frac{p_{31}}{2\sqrt{p_{30}}} + \frac{p_{20}}{2p_{30}}\right\} dx \end{bmatrix}$$

ここで積分の始点は適当に与えてよいが、後で接続をするときに定義しよう。次に形式解(2.2)を漸近展開とする(2.1)の実解の存在領域を考える。

$p_{30}(x)$ は多項式と仮定すると，その零点即ち turning point は有限個である。従って D はこれら全ての turning points を内部に含んでいるものと仮定してよい。各 turning point a からでる曲線 S：

$$Re\int_a^x \sqrt{p_{30}(x)}\,dx = 0$$

を Stokes curve と呼ぶ。そうすると全複素平面は Stokes curves で境される有限個の Stokes regions に分けられる。更にこの Stokes regions のいくつかの合併集合として canonical region が定義される。canonical region は Stokes curves で境される無限集合でその内部には turning point は含まないが，少くとも一本の Stokes curve は内部に延びている，それから全ての点 x から適当に曲線を（無限遠にのびる）二本引くことができて，其の上を ξ が動くとき $Re\int_a^\xi \sqrt{p_{30}(x)}\,dx$ が単調に増加又は減少する。

そこでこの canonical region と D の共通部分を D に関する canonical region と呼ぶことにしよう。このとき次の定理が成り立つ：

定理．D に関する canonical region を $C[D]$ とかく．$C[D]$ の境界上の turning points を $\{a_1, \cdots, a_k\}$ としその 0 点の order を $\{q_1, \cdots, q_k\}$ とする。各 a_i に対し domain of influence Na_i

$$Na_i : \{x ;\ |x-a_i| \leqq N\varepsilon^{2/(q_i+2)},\ N\ \text{const.}\}$$

を対応させる．このとき

$$C[D]-\bigcup_{i=1}^{k} N a_i$$

において形式解(2.2)を漸近展開とするような(2.1)の実解が存在する。ここで domain of influence は $\varepsilon \to 0$ のとき $x=a_i$ に縮むことが、後で turning point 自身における漸近展開を求めるときに役立つことを注意しておく。証明は

8. T. Nishimoto On the Orr-Sommerfeld type equations, I Kodai Math. Sem. Rep 24 (1972)

§3 接続公式

この節では全ての turning points は simple ($q=1$) とする。接続公式を計算する前に漸近展開の公式(2.2)の意味を明確にしておく必要がある。即ち多価関数の分枝や積分記号の下側を決めなくてはならない。

任意の D に関する canonical region を $C[D]$ としよう．$C[D]$ は少くとも1つの Stokes curve を含むから従って $C[D]$ の境界上にある1つの turning point a とそこから $C[D]$ の内部にのびている Stokes curve S を指定する。この $\{S\ a\ C[D]\}$ の組に対して(2.2)の漸近展開を次のように定義する：

(1) $U_0(x)$ は $x=a$ の近傍で

$$y_{11} = 1 + \sum_{i=1} d_i (x-a)^i$$

$$y_{12} = (x-a)^{1-\lambda}\left\{\sum_{i=0} e_i (x-a)^i\right\} \qquad \lambda = \frac{p_{200}}{p_{301}},\ e_0 = 1$$

(但し $p_{20}(x) = p_{200} + p_{201}(x-a) + \cdots,\ p_{30}(x) = p_{301}(x-a) + \cdots$)

によって定義されるもので、解析接続により $C[D]$ で分っているものとする。(注 (1.3) の $x=a$ における決定方程式の根は $(0,\ 1-\lambda)$ となるが簡単のため λ は integer でないものとする)。次に

(2) $V_0(x)$ については積分を

$$\int_a^x \left\{\frac{\sqrt{p_{30}(x)}}{\varepsilon} + \frac{p_{31}(x)}{2\sqrt{p_{30}(x)}}\right\} dx + \int_b^x \frac{p_{20}(x)}{2p_{30}(x)} dx \qquad p_{30}(b) \neq 0$$

と定義し更に V_0 全体に $\delta(a)$ を掛けて $\exp\left\{\int_b^x p_{20}/2p_{30}\,dx\right\}$ を $x=a$ の近傍で展開したとき $(x-a)^{\lambda/2}\{1+\cdots\}$ となるようにする。このような $\delta(a)$ は次のように求められる:

$$\frac{p_{20}}{2p_{30}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{A_i}{x-a_i} + g(x), \quad A_i \text{ const},\ g(x) \text{ 多項式},\ a=a_0$$

とかけるならば

$$\delta(a) = e^{\int_a^b g(x)dx} \cdot (b-a)^{A_0} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{(b-a_i)}{(a-a_i)}\right)^{A_i}.$$

更に S 上において

$$I_m \int_a^x \sqrt{p_{30}(x)}\, dx > 0$$

とする。このことは a からの進行方向に対して、S の右側で $\mathrm{Re}\int_a^x\sqrt{P_{30}(x)}\,dx>0$ となり左側で <0 となることを意味する。その他の多価関数は適当にとる。C[D] 内には turning point は含まれていないから分枝は1つきめれば C[D] 内で一意的にきまる。

このように $\{S\ a\ C[D]\}$ に対応してきまる基本解を $Y\{S\ a\ C[D]\}$ とかくことにする。このとき1つの $Y\{S\ a\ C[D]\}$ の D 全体での漸近展開を得るには次の5つの型の接続公式を求めればよい：

(1) $Y\{S\ a_2\ C[D]\}=Y\{S\ a_1\ C[D]\}\Omega_1$

(2) $Y\{S_2\ a_2\ C[D]\}=Y\{S_1\ a_1\ C[D]\}\Omega_2$

(3) $Y\{S\ a\ C_2[D]\}=Y\{S\ a\ C_1[D]\}\Omega_3$

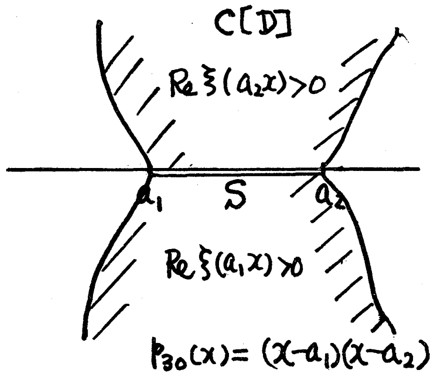
(4) $Y\{S_2\ a\ C_2[D]\}=Y\{S_1\ a\ C_1[D]\}\Omega_4$

(5) $Y\{S\ a\ C[D]\}$ の $x=a$ の近傍における漸近展開

これらの接続係数は x には depend しないが ε に depend する行列である。以下においてこれらの行列の leading term を求めることにする。

$$\xi(a\,x)=\int_a^x\sqrt{P_{30}(x)}\,dx$$ とおく。

(1) Ω_1



$\{S\ a_2\ C[D]\}$ と $\{S\ a_1\ C[D]\}$ とは S の向きが反対である．従って $\xi(ax)$ の分枝のとり方が反対になっている。そこで $Y\{S\ a_2\ C[D]\}$ の分枝を $Y\{S\ a_1\ C[D]\}$ にあわせると $Y\{S\ a_2\ C[D]\}$ は

$$Y\{S\ a_2\ C[D]\}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv Y\{S\ a_2\ C[D]\}\,I$$

となる。それ以外の分枝は同一にとると

$$Y\{S\ a_2\ C[D]\}\,I = Y\{S\ a_1\ C[D]\}\,\Omega_1$$

$$\therefore\ \Omega_1 = \begin{bmatrix} U_0(x\,a_1)^{-1}U_0(x\,a_2)(E+O(\varepsilon)), & O(\varepsilon)U_0^{-1}(x a_1)V_0(x\,a_2\varepsilon) \\ O(\varepsilon)U_0(x\,a_2)V_0^{-1}(x\,a_1\varepsilon), & V_0^{-1}(x\,a_1\varepsilon)V_0(x\,a_2\varepsilon)(E+O(\varepsilon)) \end{bmatrix}$$

但し
$$V_0(x\,a\,\varepsilon) = \delta(a)\,p_{30}^{-\frac{1}{4}}\begin{bmatrix} \exp\left[\int_a^x\left\{\frac{\sqrt{p_{30}(x)}}{\varepsilon}+\frac{p_{31}(x)}{2\sqrt{p_{30}(x)}}\right\}dx+\int_b^x\frac{p_{20}(x)}{2p_{30}(x)}dx\right], & 0 \\ 0, & \exp\left[-\int_a^x\left\{\frac{\sqrt{p_{30}(x)}}{\varepsilon}+\frac{p_{31}(x)}{2\sqrt{p_{30}(x)}}\right\}dx+\int_b^x\frac{p_{20}(x)}{2p_{30}(x)}dx\right] \end{bmatrix}$$

$$\sigma_+ = \sup_{C[D]} Re\,\xi(a_1x) > 0,\quad \sigma_- = \inf_{C[D]} Re\,\xi(a_1x) < 0$$

$$\sigma = \min\{\sigma_+, -\sigma_-\} - \nu\ (>0)$$

とおく，ν は任意に小なる正数である。

又

$$U_0(x a_1)^{-1} U_0(x a_2) = C(a_1 a_2)$$

とおく。$C(a_1 a_2)$ = reduced equation (1.3) の確定特異点 a_1 と a_2 における基本解の接続係数である。このとき

$$\Omega_1 \simeq \begin{bmatrix} C(a_1 a_2)(E+O(\varepsilon)) & O(\varepsilon)\exp(-\sigma/\varepsilon) \\ O(\varepsilon)\exp(-\sigma/\varepsilon) & \delta(a_1)^{-1}\delta(a_2)D(a_1 a_2 \varepsilon)(E+O(\varepsilon)) \end{bmatrix}$$

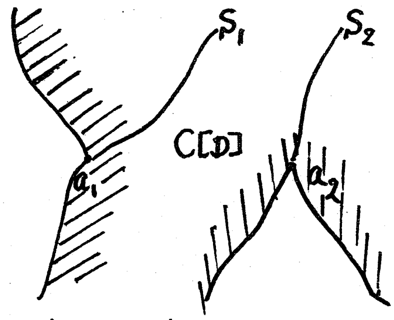
但し

$$D(a_1 a_2 \varepsilon) = \begin{bmatrix} O(\varepsilon)\exp(-2\sigma/\varepsilon) & \exp\{-\eta(a_1 a_2 \varepsilon)\} \\ \exp\eta(a_1 a_2 \varepsilon) & O(\varepsilon)\exp(-2\sigma/\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$\eta(a_1 a_2 \varepsilon) = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \sqrt{p_{30}}/\varepsilon + p_{31}/2\sqrt{p_{30}} \right\} dx .$$

(2) Ω_2

$\xi(a_1 x)$ と $\xi(a_2 x)$ は $C[D]$ で同じ分枝をもつ場合の接続係数を求めておけばよい。(右図の場合そうなっている)。

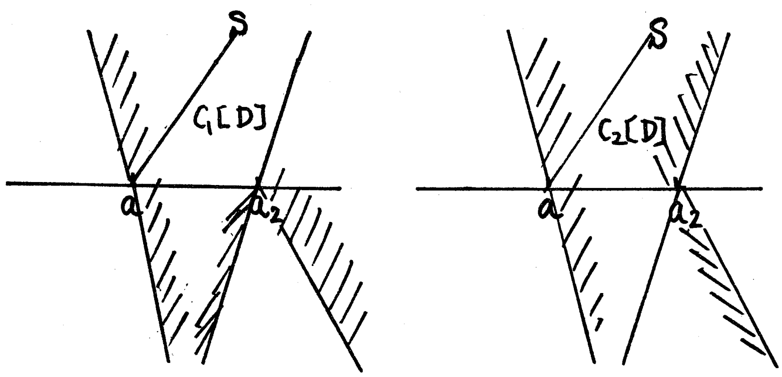


$p_{30}(x) = i(x-a_1)(x-a_2)$

Ω_1 と同様にして

$$\Omega_2 \simeq \begin{pmatrix} C(a_1 a_2)(E+O(\varepsilon)) & \left(O(\varepsilon)\exp(-\sigma/\varepsilon)\right) \\ \left(O(\varepsilon)\exp(-\sigma/\varepsilon)\right) & \delta(a_1)^{-1}\delta(a_2)\begin{pmatrix} \exp\{-\eta(a_1 a_2 \varepsilon)\} & O(\varepsilon)\exp(-2\sigma/\varepsilon) \\ O(\varepsilon)\exp(-2\sigma/\varepsilon) & \exp\eta(a_1 a_2 \varepsilon) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

(3) Ω_3



$$\Omega_3 \simeq \left[\begin{array}{cc|cc} 1+O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$O(\varepsilon)\exp(-\frac{\Omega}{\varepsilon})$}} \\ O(\varepsilon) & 1+O(\varepsilon) & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$O(\varepsilon)\exp(-\frac{\Omega}{\varepsilon})$}} & 1+O(\varepsilon) & O(\varepsilon)\exp(-\frac{2\Omega}{\varepsilon}) \\ & & O(\varepsilon)\exp(-\frac{2\Omega}{\varepsilon}) & 1+O(\varepsilon) \end{array}\right]$$

(4) Ω_4 及び central connection problems

Friedrichs の "Special topics in Analysis" によれば Ω_4 を求める問題は type(5) の turning point 自身における漸近展開を求めることに帰着される (central connection problem)。

方程式 (2.1) は stretching and shearing により

$$x-a = s\varepsilon^{2/3}$$

$$Y = \mathrm{diag}\{\varepsilon^{4/3}\ \ \varepsilon^{2/3}\ \ 1\ \ \varepsilon^{1/3}\}W,$$

$$W' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_1(x\varepsilon)\varepsilon^{2/3} & p_2(x\varepsilon) & p_3(x\varepsilon)\varepsilon^{-2/3} & 0 \end{bmatrix} W.$$

(2.3) $$W = \sum_{i=0} W_i(s)\,\varepsilon^{i/3}$$

とおいて上式に代入すれば

(2.4) $$W_0' = A_0(s)W_0(s)$$

$$W_1' = A_0(s)W_1(s) + A_1(s)W_0(s) \quad \text{等々.}$$

但し

$$A_0(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & p_{200} & p_{301}s & 0 \end{bmatrix} \quad A_1(s) = \begin{bmatrix} & & 0 & \\ & & & \\ & & & \\ p_{100} & p_{201}s & p_{302}s^2 & 0 \end{bmatrix}$$

方程式(2.4)は、単独方程式

$$-w^{(4)} + p_{301}s\,w^{(2)} + p_{200}w' = 0$$

と同値である。

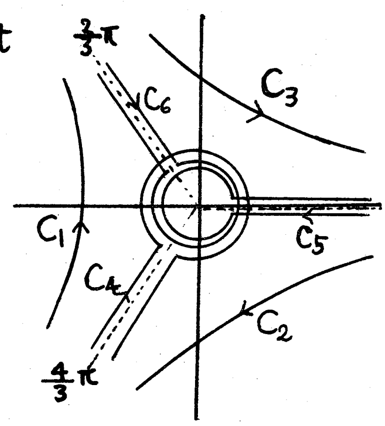
$$z = p_{301}{}^{1/3}s \quad , \quad \lambda = p_{200}/p_{301} \ (\text{not integer})$$

とおくと上式は

$$w^{(4)} - \{zw'' + \lambda w'\} = 0$$

となりこの解は Laplace 積分で容易にとける.

$$w_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} t^{\lambda-2}\exp\{zt - \tfrac{1}{3}t^3\}\,dt$$



$(j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

積分路 C_j は右図のとおりとする。$w_j(z)$ は容易に原点での収束解，無限遠での漸近展開が計算される。

$w_j(z)$ の漸近展開をかくと

$$w_1 \quad -\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{e^{\lambda\pi i}}{\pi i}\, z^{\frac{\lambda}{2}-\frac{5}{4}}\, e^{-\xi}\left\{\sum_{k=0}\Gamma(k+\tfrac{1}{2})\, b_{2k}\,\xi^{-k}\right\},\quad \xi = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$$

$$|\arg z| < \pi$$

$$w_2 \quad \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{e^{-\lambda\pi i}}{\pi i}\, z^{\frac{\lambda}{2}-\frac{5}{4}}\, e^{-\xi}\left\{\sum_{k=0}\Gamma(k+\tfrac{1}{2})\, b_{2k}\,\xi^{-k}\right\}\quad \xi = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{7}{3}\pi$$

$$w_3 \sim \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\pi}\, z^{\frac{\lambda}{2}-\frac{5}{4}}\, e^{-\xi_1}\left\{\sum_{k=0}\Gamma(k+\tfrac{1}{2})\, b_{2k}\,\xi_1^{-k}\right\}\quad \xi_1 = -\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{5}{3}\pi$$

$$w_4 \sim \frac{-e^{-\lambda\pi i} + e^{\lambda\pi i}}{2\pi i}\, z^{-\lambda+1}\left\{\sum_{k=0}\Gamma(2k+\lambda-1)\, d_{2k}\, z^{-3k}\right\}$$

$$-\pi < \arg z < \frac{\pi}{3}$$

$$w_5 \sim \frac{e^{-5(\lambda-1)\pi i/3}}{2\pi i}\left(e^{-2\lambda\pi i} - 1\right) z^{-\lambda+1}\left\{\sum_{k=0}\Gamma(2k+\lambda-1)\, d_{2k}\, z^{-3k}\right\}$$

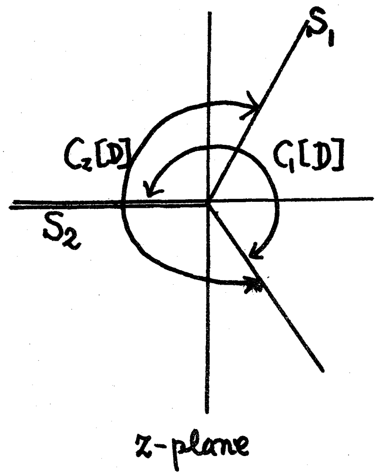
$$\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{5}{3}\pi$$

$$w_6 \sim \frac{e^{-(\lambda-1)\pi i/3}}{2\pi i}\left(e^{-2\lambda\pi i} - 1\right) z^{-\lambda+1}\left\{\sum_{k=0}\Gamma(2k+\lambda-1)\, d_{2k}\, z^{-3k}\right\}$$

$$-\frac{\pi}{3} < \arg z < \pi$$

さて §2 の定理と Matching method に関する一般論から解 $Y\{S\ a\ C[D]\}$ と内部解 $\mathrm{diag}\{\varepsilon^{4/3}\ \varepsilon^{2/3}\ 1\ \varepsilon^{1/3}\}W(s,\varepsilon)$ は互いに overlap する領域で定義され従って matching が可能である。更に connection matrix は漸近的に対角形であることが分っているので $Y\{S\ a\ C[D]\}$ を $x=a$ の近傍で $x-a$ の中に展開し一方では $w(z)$ を $z\to\infty$ において漸近展開したものを比較することにより割合簡単に matching matrix が得られる。

今 $Y\{S_1\ a\ C_1[D]\}$ において



S_1 は a から $\arg z = \arg(p_{301}^{1/3}(x-a)) = \frac{\pi}{3}$ の方向に出ているものとする。従って $\mathrm{Re}\,\xi(a\,x)$ は S の下，即ち $-\frac{\pi}{3}\sim\frac{\pi}{3}$ で正，$\frac{\pi}{3}\sim\pi$ で負となっている。Y の4つの解を略式に

$$y^1 \sim 1+\cdots$$

$$y^2 \sim (x-a)^{1-\lambda}(1+\cdots$$

$$y^3 \sim \cdot\exp\{\xi(a\,x)/\varepsilon\}$$

$$y^4 \sim \cdot\exp\{-\xi(a\,x)/\varepsilon\}$$

とかき 丁度これらに対応する内部解を探すとそれは $\varepsilon^{4/3}\{1,\ w_6(z),\ w_3(z),\ w_1(z)\}$ ととればよいことが分る。

matching matrix の主要項は

$$Y\{S_1\ a\ C_1[D]\} = \varepsilon^{4/3}\{1,\ w_6\ w_3\ w_1\}\Pi_1$$

$$\Pi_1 = \mathrm{diag}\{\varepsilon^{-4/3},\ c_{22}\varepsilon^{-\frac{2}{3}(\lambda+1)},\ c_{33}\varepsilon^{\frac{2\lambda}{3}-\frac{1}{6}},\ c_{44}\varepsilon^{\frac{2\lambda}{3}-\frac{1}{6}}\}$$

$c_{22}\quad c_{33}\quad c_{44}$ は常数。

同様に S_2 を $x=a$ の近傍で $\arg z = \arg P_{30}{}^{1/3}(x-a) = \pi$ とし $Y\{S_2\ a\ C_2[D]\}$ を考える。これに対応する内部解は $\varepsilon^{4/3}\{1,\ w_5(z)\ w_2(z),\ w_3(z)\}$ である。matching matrix Π_2 は

$$\Pi_2 = \mathrm{diag}\{\varepsilon^{-4/3}\ \tilde{c}_{22}\varepsilon^{-\frac{2}{3}(\lambda+1)},\ \tilde{c}_{33}\varepsilon^{\frac{2\lambda}{3}-\frac{1}{6}},\ \tilde{c}_{44}\varepsilon^{\frac{2\lambda}{3}-\frac{1}{6}}\}。$$

次にこれらを利用して Ω_4 を求めてみよう。

$$Y\{S_1\ a\ C_1[D]\} = Y\{S_2\ a\ C_2[D]\}\Omega_4$$

$$\therefore\quad \{1,\ w_6\ w_3\ w_1\}\Pi_1 = \{1,\ w_5\ w_2\ w_3\}\Pi_2\Omega_4$$

$\{1,\ w_6\ w_3\ w_1\}$ と $\{1,\ w_5\ w_2\ w_3\}$ の接続公式は原点における値から計算できて

$$\{1, w_6\ w_3\ w_1\} = \{1, w_5\ w_2\ w_3\}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega^{3\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & -\omega^{3\lambda} \\ 0 & 1-\omega^{-3\lambda} & 1 & -1 \end{bmatrix},\quad \omega = e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

$$\Omega_4 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_{22} & 0 & \bar{c}_{24}\varepsilon^{\lambda+\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{34} \\ 0 & \bar{c}_{42}\varepsilon^{-\lambda-\frac{1}{2}} & \bar{c}_{43} & ie^{-\lambda\pi i} \end{bmatrix}$$

但し
$$\bar{c}_{22} = \exp\left\{-\frac{4}{3}(\lambda-1)\pi i\right\},$$

$$\bar{c}_{42} = \frac{-p_{301}{}^{\frac{1}{2}(\lambda+1)}\sqrt{2\pi}\,\exp\{(\lambda-1)\pi i/3\}}{\Gamma(\lambda-1)},$$

$$\bar{c}_{24} = \frac{p_{301}{}^{-\frac{1}{2}(\lambda+1)}\{\exp(-\lambda\pi i)-\exp\lambda\pi i\}\,\Gamma(\lambda-1)}{\sqrt{2\pi}\,i\,\exp\{5(\lambda-1)\pi i/3\}},$$

$$\bar{c}_{43} = \bar{c}_{34} = -1.$$

さて以上で O-S type equation の解の漸近展開，接続公式の leading term が全て求まったわけである．応用上必要な λ が整数の場合の接続係数やその higher terms も計算できるであろう．しかし、数学的には $C(a_1\, a_2)$ を precisely に求めることや，物理的には neutral curves の存在性等につき，研究すべきことが数多くあるように思われる。

以上