数理解析研究所講究録
第224巻 1974年 101-122

微分方程式系の接続問題

広島大　理学部　河野實彦

§1.　線型微分方程式の大域的性質を解明するためには，解の大域的表現があれば，その解析は比較的容易であろう。例えば，一階線型微分方程式の解は，求積法で簡単に得られ，その大域的積分表示を通して，解のあらゆる行動を知ることができる。しかし，一般の微分方程式に対しては，解の大域的表現は求むべくもない。そこで，微分方程式の解を，大域的性質のわかった関数によって表現することを考えてみてはどうであろうか。境界値問題における固有関数展開の如く，微分方程式の解を，それに固有の関数を用いて，展開する方法もその一つである。ここで，固有と言ったのは，微分方程式から，解が，局所的には，如何なる行動をするかはわかるわけであるから，その性質を，展開に用いる関数も持ちあわせていなければなるまい。即ち，微分方程式から，解の行動を規定してしまう特異性をぬき出し，

その全てか，または，その中のいくつかの性質を持つ関数を関数項展開に用いるわけで，そうした関数は，必然的に，元の微分方程式からきまってしまうはずである。こうした「展開による解析」の初段階として，大域的積分表示のある一階線型微分方程式の解の応用が考えられる。実際，大久保[1]において，二つの特異点を持つ微分方程式の接続問題の解析に，始めてこの方法が用いられた。その後の，二点接続問題に関する一連の論文 大久保[2]，河野[3][4][5] においても，それぞれの微分方程式の特異性に対応した一階微分方程式の解が選ばれ，用いられてきた。

さて，ここでは，微分方程式系

$$
(1.1)\quad \begin{cases} t\dfrac{dX}{dt} = (B_0 + B_1 t + \cdots + B_q t^q)X \\[2ex] B_0, B_1, \ldots, B_q \quad n\times n \text{ 定数行列} \\[2ex] B_q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j) \end{cases}
$$

の接続問題を，同じ方法に基づいて解明する。

微分方程式系(1.1)は，原点 $t=0$ に確定特異点，$t=\infty$ に rank q の不確定特異点を持つものであることは，明らかであろう。原点 $t=0$ の近傍における基本解は，巾級数によって表現されるが，行列 B_0 の固有値 ρ_j $(j=1,2,\ldots,n)$ の

中に，等しいもの，また整数差があるものがある場合には，対数項を含んだ表現式となる。いま，$\rho_\mu \geqq \rho_{\mu_1} \geqq \cdots \geqq \rho_{\mu_k}$，$\rho_\mu - \rho_{\mu_l} = m_{\mu_l} \geqq 0$（$m_{\mu_l}$ は整数），とすると，これらの指数に対応して，

$$\begin{cases} X_\mu = t^{\rho_\mu} \sum_{m=0}^{\infty} G_\mu(m)\, t^m & (G_\mu(m) \text{ は列ベクトル}) \\ X_{\mu_l} = \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{(l-j)} (\log t)^{l-j} \tilde{X}_{\mu_j}(t) & \\ \tilde{X}_{\mu_j}(t) = t^{\rho_{\mu_j}} \sum_{m=0}^{\infty} G_{\mu_j}(m)\, t^m & (j = 2, 3, \ldots, k) \end{cases}$$

なる線型独立な解が得られる。しかし，整数差のある固有値の組に対応して，常に対数項が現われるわけではない。W. Wasow [6] §17.1 を見ていただくとわかるが，適当な多項式変換（有限回の定数変換と Shearing 変換より成る）をほどこすことにより，定数項行列を

$$\begin{cases} \hat{B}_0 = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & \ddots \; J_\nu \end{pmatrix} & \\ J_\mu = \rho_\mu I_\mu + \mathfrak{A}_\mu . & I_\mu \quad \text{単位行列} \\ \mathfrak{A}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} & (1 \leqq \mu \leqq \nu) \end{cases}$$

の形にすることができるが，その一つの Jordan block J_μ に対応する解の表現式が上のようになるのである。

これからは，微分方程式系 (1.1) の原点 $t=0$ の近傍における基本解が，数個の上のような表現式の組より成る場合を考察するが，それは定数項行列 B_0 が Jordan block 一つより成る場合と解析は，本質的に異ならない。

そこで，(1.1) において

$$(1.2) \qquad B_0 = \rho I + \mathfrak{N}, \qquad \mathfrak{N} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と仮定する。　原点 $t=0$ の近傍における基本解は

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{aligned} & X_1(t) = t^\rho \sum_{m=0}^{\infty} G_1(m) t^m \\ & X_l(t) = \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{(l-j)!} (\log t)^{l-j} \tilde{X}_j(t) \qquad (l=2,3,\ldots,n) \\ & \tilde{X}_j(t) = t^\rho \sum_{m=0}^{\infty} G_j(m) t^m \qquad (j=1,2,\ldots,n) \\ & \tilde{X}_1(t) \equiv X_1(t) \end{aligned} \right.$$

となる。　$X_l(t)$ $(l=1,2,\ldots,n)$ を (1.1) に代入してみるとわかるが，$\tilde{X}_j(t)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ は，次の微分方程式系をみたす。

$$t\frac{d\tilde{X}_1}{dt} = (B_0 + B_1 t + \cdots + B_q t^q)\tilde{X}_1$$

$$t\frac{d\hat{\tilde{X}}_j}{dt}=(B_0+B_1t+\cdots+B_qt^q)\tilde{X}_j-\tilde{X}_{j-1}$$
$$(j=2,3,\ldots,n)$$

このことから，$\hat{X}_j(t)$ の巾級数表現の係数 $G_j(m)$ は漸化式

$$(1.4)\quad\begin{cases}(m+\rho-B_0)G_1(m)=B_1G_1(m-1)+\cdots+B_qG_1(m-q)\\(\rho-B_0)G_1(0)=0\ ,\quad G_1(-p)=0\ (p>0)\end{cases}$$

$$(1.5)\quad\begin{cases}(m+\rho-B_0)G_j(m)=B_1G_j(m-1)+\cdots+B_qG_j(m-q)-G_{j-1}(m)\\(\rho-B_0)G_j(0)=-G_{j-1}(0)\ ,\quad G_j(-p)=0\quad(p>0)\end{cases}$$

をみたすものであることがわかる。

不確定特異点である $t=\infty$ の近傍における基本解は，ある扇形領域 S において

$$(1.6)\qquad X_S^k(t)\sim X^k(t)\qquad(t\to\infty)\qquad(k=1,2,\ldots,n)$$

なる漸近行動をもつものとして求められる。ここで，$X^k(t)$ は，微分方程式系（1.1）の形式解で

$$(1.7)\qquad X^k(t)=\exp\left(\frac{\lambda_k}{q}t^q+\frac{\alpha_{q-1}^k}{q-1}t^{q-1}+\cdots+\alpha_1^kt\right)t^{\mu_k}\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)t^{-s}$$

なる式で表現され，係数の列ベクトル $H^k(s)$ は，漸化式

$$
(1.8)\quad \begin{cases} (B_q-\lambda_k)H^k(s+q)+(B_{q-1}-\alpha_{q-1}^k)H^k(s+q-1) \\ \quad +\cdots+(B_1-\alpha_1^k)H^k(s+1)+(B_0+s-\mu_k)H^k(s)=0 \\ (B_q-\lambda_k)H^k(0)=0, \qquad H^k(-p)=0 \quad (p>0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (k=1,2,\ldots,n) \end{cases}
$$

によって，求められるものである。

接続問題は，共通の存在領域における二つの基本解の間の関係式

$$
(1.9)\quad (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)) = (X_S^1(t), X_S^2(t), \ldots, X_S^n(t))\, T_S
$$

における定数行列 T_S（扇形領域 S に依存する）を決定することである。解析は，先に述べた如く，原点 $t=0$ では $X_j(t)$ と同じ振舞いを，$t=\infty$ の近くでは，形式解 $X^k(t)$ と同じ挙動をする一階線型微分方程式の解により，$X_j(t)$ を展開（＝分解）することにある。その展開の方法を述べておこう。いきなり，一階線型微分方程式

$$
\begin{aligned}
(1.10)\quad t\frac{d}{dt}Y^{(k,l)}(t,s) &= \{\lambda_k t^q+\cdots+\alpha_1^k t+(\mu_k-s-\sigma_l)\}\, Y^{(k,l)}(t,s) \\
&+ [\lambda_k g^{(k,l)}(s-1)]\, t^{p+q-1} \\
&+ [\lambda_k g^{(k,l)}(s-2)+\alpha_{q-1}^k g^{(k,l)}(s-1)]\, t^{p+q-2} \\
&+ [\lambda_k g^{(k,l)}(s-q)+\cdots+\alpha_1^k g^{(k,l)}(s-1)]\, t^p
\end{aligned}
$$

をみたす特殊解

$$(1.11)\qquad Y^{(k,l)}(t,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\mathfrak{g}^{(k,l)}(m+s)\,t^{m+\rho}$$

を導入するが；これは正に要求されている性質をもつ関数なのであるが，その説明は省く。(1.11)の巾級数の係数の列ベクトル $\mathfrak{g}^{(k,l)}(m)$ は

$$(1.12)\qquad (m+\rho-\mu_k+\mathfrak{N})\,\mathfrak{g}^{(k,l)}(m)=\alpha_1^k\mathfrak{g}^{(k,l)}(m-1)+\cdots+\lambda_k\mathfrak{g}^{(k,l)}(m-q)$$

なる漸化式をみたすが．これを複素変数 m の q-階差分方程式系として考える。このことは，(1.4)(1.5)についても同様である。$\mathfrak{g}^{(k,l)}(m)$ の第一行のみたす q-階差分方程式

$$(1.13)\qquad (m+\rho-\mu_k)\,g_1^k(m)=\alpha_1^k g_1^k(m-1)+\cdots+\lambda_k g_1^k(m-q)$$

の線型独立な解を

$$g_1^{(k,1)}(m),\ g_1^{(k,2)}(m),\ \ldots,\ g_1^{(k,q)}(m)$$

とすれば，次のことが証明できる。

命題 1　各 k に対して

$$(1.14)\qquad g_j^{(k,l)}(m)=\frac{1}{(j-1)!}\frac{d^{j-1}}{dm^{j-1}}\left(g_1^{(k,l)}(m)\right)$$

$$(j=2,3,\ldots,n)$$

と定義すれば，列ベクトル

$$(1.15)\qquad \mathfrak{g}^{(k,l)}(m)=\begin{pmatrix} g_1^{(k,l)}(m)\\ g_2^{(k,l)}(m)\\ \vdots \\ g_n^{(k,l)}(m)\end{pmatrix}\qquad (l=1,2,\ldots,q)$$

は 差分方程式系（1.12）をみたす。

上の命題より，今後（1.11）における $Y^{(k,l)}(t,s)$ とは，(1.15）の列ベクトルを，巾級数の係数としているものとする。

ここで，列ベクトル

$$(1.16)\qquad F_1^{(k,l)}(m)\equiv\sum_{s=0}^{\infty}H^{k}(s)\,g_1^{(k,l)}(m+s)$$

$$(k=1,2,\ldots,n\ ;\ l=1,2,\ldots,q)$$

を定義しよう。この列ベクトルの Well-definedness や，のちに使う，$m\to\infty$ のときの漸近的性質等の証明は次節にまわす。（この証明がいつも厄介なのである!!）

<u>命題 2</u>.

$\{F_1^{(k,l)}(m)\ ;\ k=1,2,\ldots,n\ ;\ l=1,2,\ldots,q\}$ は差分方程式系（1.4）の基本解となる。よって $G_1(m)$ は

$$(1.17)\qquad G_1(m)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}\Pi_1^{(k,l)}F_1^{(k,l)}(m)$$

と表わされる。　定数 $\Pi_1^{(k,l)}$ は $G_1(m)$ の初期条件により決定される。

証明。　(1.8) と (1.13) より、各 $F_1^{(k,l)}(m)$ が差分方程式系 (1.4) をみたすことは容易にわかる。　それらが、線型独立なことであるが、それには Casorati 行列を調べれば良い。

$$|C_{F_1}(m)|=\mathrm{Det}\begin{pmatrix} F_1^{(1,1)}(m)\cdots F_1^{(n,1)}(m), & \cdots F_1^{(1,q)}(m) & \cdots & F_1^{(n,q)}(m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ F_1^{(1,1)}(m+q-1)\cdots F_1^{(n,1)}(m+q-1) & \cdots F_1^{(1,q)}(m+q-1), & \cdots & F_1^{(n,q)}(m+q-1)\end{pmatrix}$$

$C_{F_1}(m)$ は右辺の行列を表わすものとする。

Casorati 行列は、一階差分方程式

$$(1.18)\qquad (m+q-1)^n\,|C_{F_1}(m)|=(-1)^{n^2(q-1)}\left(\prod_{k=1}^{n}\lambda_k\right)\cdot|C_{F_1}(m-1)|$$

をみたすので、右半平面で正則な解として

$$(1.19)\qquad |C_{F_1}(m)|=\frac{\left((-1)^{n^2(q-1)}\prod_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^{m+q-1}}{[\Gamma(m+q)]^n}\,|C_{F_1}(-q+1)|$$

を得る。

そこで、右半平面での漸近関係

$$F_1^{(k,l)}(m) \sim H^k(0)\, g_1^{(k,l)}(m) \left\{ 1 + O(m^{-\frac{1}{q}}) \right\}$$

を用いれば，

$$|C_{F_1}(m)| \sim \prod_{k=1}^{n} |C_{g_k}(m)| \left\{ 1 + O(m^{-\frac{1}{q}}) \right\}$$

$$|C_{g_k}(m)| = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} g_1^{(k,1)}(m), & \cdots & g_1^{(k,q)}(m) \\ \vdots & & \\ g_1^{(k,1)}(m+q-1) & \cdots & g_1^{(k,q)}(m+q-1) \end{pmatrix}$$

が得られる。

$\prod_{k=1}^{n} |C_{g_k}(m)| \neq 0$ となることに注意すれば，Casorati 行列 $|C_{F_1}(m)|$ は，大きい m の値に対して 0 となることはない。そして，その結果，$m \geq -q+1$ なる整数 m に対しても，決して 0 とならないことが (1.19) 式からわかろう。

定数 $\Pi_1^{(k,l)}$ ($k=1,2,\ldots,n$: $l=1,2,\ldots,q$) は Stokes 係数と呼ばれるが，次の式で決められる。

$$\begin{pmatrix} G_1(-q+1) \\ \vdots \\ G_1(-1) \\ G_1(0) \end{pmatrix} = C_{F_1}(-q+1) \begin{pmatrix} \Pi_1^{(1,1)} \\ \vdots \\ \Pi_1^{(n,1)} \\ \vdots \\ \Pi_1^{(1,q)} \\ \vdots \\ \Pi_1^{(n,q)} \end{pmatrix}$$

更に、列ベクトル

$$(1.20)\qquad F_j^{(k,l)}(m) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s)\, g_j^{(k,l)}(m+s) \qquad (j=2,3,\ldots,n)$$

$$(k=1,2,\ldots,n\ ;\ l=1,2,\ldots,q)$$

を定義しよう。　$g_j^{(k,l)}(m)$ が　非斉次差分方程式

$$(1.21)\qquad (m+\rho-\mu_k)\, g_j^{(k,l)}(m) = \alpha_1^k g_j^{(k,l)}(m-1) + \cdots + \lambda_k g_j^{(k,l)}(m-q)$$

$$- g_{j-1}^{(k,l)}(m)$$

をみたすものであることに注意し、(1.8) とから、$F_j^{(k,l)}(m)$ は

$$(1.22)\qquad (m+\rho-B_0)\, F_j^{(k,l)}(m) = B_1 F_j^{(k,l)}(m-1) + \cdots + B_q F_j^{(k,l)}(m-q)$$

$$- F_{j-1}^{(k,l)}(m)$$

$$(j=2,3,\ldots,n)$$

なる関係式をみたすことは、簡単な計算によりわかる。
このことを考慮して、次の命題を得る。

<u>命題 3</u>　　$r=2,3,\ldots,n$　に対する $G_r(m)$ は　次のように表わされる。

$$(1.23)\qquad G_r(m) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{q} \Gamma_{r+1-j}^{(k,l)}\, F_j^{(k,l)}(m)$$

証明　帰納法による。　$1 \leqq j \leqq r$ までの Stokes 係数 $\{\mathfrak{T}_j^{(k,l)} : k=1,2,\ldots,n : l=1,2,\ldots,q\}$ が決定され，(1.23)式が得られたものと仮定する。　(1.22)式の両辺に $\mathfrak{T}_{r+2-j}^{(k,l)}$ をかけ，k について 1 から n まで，l については 1 から q まで，j について 2 から $r+1$ まで加えると

$$\begin{cases} (m+\rho-B_0)\,\hat{G}_{r+1}(m) = B_1\hat{G}_{r+1}(m-1)+\cdots+B_q\hat{G}_{r+1}(m-q) \\ \qquad\qquad -G_r(m) \\ \hat{G}_{r+1}(m) = \displaystyle\sum_{j=2}^{r+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}\mathfrak{T}_{r+2-j}^{(k,l)}\,F_j^{(k,l)}(m) \end{cases}$$

を得る。　即ち，$\hat{G}_{r+1}(m)$ は $j=r+1$ に対する非斉次差分方程式系 (1.5) の一つの解であることを示す。

よって，$G_{r+1}(m)$ は

$$G_{r+1}(m) = \hat{G}_{r+1}(m) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}\mathfrak{T}_{r+1}^{(k,l)}\,F_1^{(k,l)}(m)$$

と表わされる。　ここで，Stokes 係数 $\{\mathfrak{T}_{r+1}^{(k,l)} : k=1,2,\ldots,n : l=1,2,\ldots,q\}$ は連立式

$$\begin{pmatrix} G_{r+1}(-q+1)-\hat{G}_{r+1}(-q+1) \\ \vdots \\ G_{r+1}(-1)-\hat{G}_{r+1}(-1) \\ G_{r+1}(0)-\hat{G}_{r+1}(0) \end{pmatrix} = G_{F_1}(-q+1) \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_{r+1}^{(1,1)} \\ \vdots \\ \mathfrak{T}_{r+1}^{(n,1)} \\ \vdots \\ \mathfrak{T}_{r+1}^{(1,q)} \\ \vdots \\ \mathfrak{T}_{r+1}^{(n,q)} \end{pmatrix}$$

によって，決定される。

上の命題3をまとめれば

$$
\begin{aligned}
&(G_1(m), G_2(m), \ldots, G_n(m))\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}\left(F_1^{(k,l)}(m), F_2^{(k,l)}(m), \ldots, F_n^{(k,l)}(m)\right) \mathcal{J}^{(k,l)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{\infty} H^k(s)\left(\sum_{l=1}^{q} \mathcal{G}_*^{(k,l)}(m+s)\, \mathcal{J}^{(k,l)}\right)
\end{aligned}
$$

となる。ここで，定数行列 $\mathcal{J}^{(k,l)}$ は

$$
\mathcal{J}^{(k,l)} = \begin{pmatrix} \Pi_1^{(k,l)} & \Pi_2^{(k,l)} & \cdots & \Pi_n^{(k,l)} \\ & \Pi_1^{(k,l)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \Pi_2^{(k,l)} \\ 0 & & & \Pi_1^{(k,l)} \end{pmatrix}
$$

$$
= \Pi_1^{(k,l)} I + \Pi_2^{(k,l)} \mathcal{O}_* + \cdots + \Pi_n^{(k,l)} \mathcal{O}_*^{n-1}
$$

である。 ＊印をつけたものは，行列，ベクトル，それぞれの転置行列，転置ベクトルを表わす。

結局，上のことから，求める展開式を得る。

$$
(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))
$$

$$= \left(\hat{X}_1(t),\ \hat{X}_2(t), \ldots, \hat{X}_n(t) \right) t^{\mathfrak{A}_*}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(G_1(m), G_2(m), \ldots, G_n(m) \right) t^{m+\rho}\, t^{\mathfrak{A}_*}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s) \left(\sum_{l=1}^{q} g_*^{(k,l)}(m+s)\, t^{m+\rho}\, \mathcal{J}^{(k,l)} \right) t^{\mathfrak{A}_*}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s) \left(\sum_{l=1}^{q} Y_*^{(k,l)}(t,s)\ t^{\mathfrak{A}_*} \cdot \mathcal{J}^{(k,l)} \right) .$$

§2. $F_j^{(k,l)}(m)$ の well-definedness について，簡単に説明する。それには (1.16)(1.20) の右辺の級数の収束することを示せば良いわけで，s が充分大きいときの，$H^k(s)\ g_j^{(k,l)}(m+s)$ の大きさを問題とすれば良い。$g_j^{(k,l)}(m)$ は，いわゆる"拡張されたガンマ関数"と呼ばれるもので，m が大きいときの行動は解析的に知ることができるが，$H^k(s)$ に対しては，未だ，その一般的方法がつかめない。そこで，目下のところ，ただただ計算する他ないのである。

係数 $H^k(s)$ の値は漸化式

(2.1) $\quad (B_q - \lambda_q) H^k(s) + \cdots + (B_1 - \alpha_1^k) H^k(s-q+1)$

$$+ (B_0 + s - q - \mu_k) H^k(s-q) = 0$$

$$H^k(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} < k, \qquad H^k(-p) = 0 \quad (p > 0)$$

によって，次々と求められるわけであるが，それが，どのように決っていくのかをさぐろう。

$$H^k(s) = \begin{pmatrix} h_1^k(s) \\ \vdots \\ h_k^k(s) \\ \vdots \\ h_n^k(s) \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} b_r^{11} & \cdots & b_r^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_r^{n1} & \cdots & b_r^{nn} \end{pmatrix} \quad (0 \leqq r \leqq q-1)$$

とおいて，各成分毎について調べると，

$$(2.2) \qquad h_j^k(s) = \sum_{\nu=1}^{s} c_j^k(s:\nu)\, h_k^k(s-\nu) \qquad (j=1,2,\dots n)$$

のように表わされることがわかる。 実際，$j \neq k$ のとき (2.1) の s を $s+1$ と置きかえた式に代入してみると，$c_j^k(s:\nu)$ と $c_j^k(s+1:\nu)$ との間には，次の関係式が成立つ。

$$(2.3) \quad \begin{cases} c_j^k(s+1:1) = c_j^k(s:1) = \dfrac{1}{\lambda_k - \lambda_j} b_{q-1}^{jk} \\[2ex] c_j^k(s+1:\nu) = \dfrac{1}{\lambda_k - \lambda_j} \Big\{ b_{q-\nu}^{jk} + \displaystyle\sum_{r=1}^{\nu-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(b_{q-r}^{ji} - \delta_{ji} d_{q-r}^{k}\right) \\ \qquad\qquad \times c_i^k(s+1-r:\nu-r) \Big\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (2 \leqq \nu \leqq q) \end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
c_j^k(s+1:\nu) = \frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\Bigg\{ & \sum_{r=1}^{q-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left(b_{q-r}^{ji}-\delta_{ji}\alpha_{q-r}^{k}\right)c_i^k(s+1-r:\nu-r) \\
& + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left(b_0^{ji}+\delta_{ji}(s+1-q-\mu_k)\right)c_i^k(s+1-q:\nu-q)\Bigg\} \\
& \qquad (s+1 \geqq \nu \geqq q+1) \\
& \delta_{ji} \text{ は Kronecker のデルタ}
\end{aligned}
\right.
$$

上のことから $c_j^k(s:\nu)$ $(1 \leqq \nu \leqq q)$ は s には依存しない定数であることがわかる。

$j=k$ に対しては，

$$
(2.4)\quad
\left\{
\begin{aligned}
& b_{q-1}^{kk} = \alpha_{q-1}^{k} \\
& \sum_{r=1}^{\nu-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} b_{q-r}^{ki}\, c_i^k(s+1-\nu:\nu-r) + b_{q-\nu}^{kk} - \alpha_{q-\nu}^{k} = 0 \\
& \qquad\qquad (2 \leqq \nu \leqq q-1) \\
& \sum_{r=1}^{q-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} b_{q-r}^{ki}\, c_i^k(q-r:q-r) + b_0^{kk} - \mu_k = 0
\end{aligned}
\right.
$$

が，特性定数 $\alpha_{q-1}^k, \alpha_{q-2}^k, \ldots, \alpha_1^k, \mu_k$ を決める式で，$c_k^k(s:\nu)$ は

$$
(2.5)\qquad c_k^k(s:\nu) = -\frac{1}{s}\Bigg\{\sum_{r=1}^{q}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} b_{q-r}^{ki}\, c_i^k(s+q-r:\nu+q-r)\Bigg\}
$$

で与えられる。 (2.3)(2.5)から，次の結果が得られる。

命題 4 ν を固定すると $s \to \infty$ のとき

$$c_j^k(s:\nu) \sim d_j^k(\nu)\, s^{\left[\frac{\nu-1}{q}\right]}\left(1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right) \tag{2.6}$$

$$(j=1,2,\ldots n)$$

が成立つ。 ここで，定数 $d_j^k(\nu)$ は

$$(2.7)\quad \left\{\begin{aligned} d_j^k(mq+\mu) &= \frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\Big\{\sum_{r=1}^{\mu-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left(b_{q-r}^{ji}-\delta_{ji}\, d_{q-r}^{k}\right) d_j^k(mq+\mu-r) \\ &\qquad + d_j^k((m-1)q+\mu)\Big\} \\ &\qquad (j=1,2,\ldots,n;\ j\neq k) \\ d_k^k(mq+\mu) &= -\sum_{r=1}^{\mu-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} b_{q-r}^{ki}\, d_i^k((m+1)q+\mu-r) \end{aligned}\right.$$

で与えられる。 [ ] はガウス記号。

いま，

$$\|B_r\| = \max_i\left(\sum_{j=1}^{n}|b_r^{ij}|\right) \qquad (0 \leqq r \leqq q-1)$$

$$\gamma_{q-r}^k = \|B_{q-r}\| + |d_{q-r}^k| \qquad (1 \leqq r \leqq q-1)$$

$$\gamma_0^k = \|B_0\| + |\mu_k| + q$$

$$\Lambda^k = \min_j |\lambda_k-\lambda_j|$$

とおけば，(2.3)(2.5)から，不等式

$$
(2.8)\quad \begin{cases} |c_j^k(s:\nu)| \leqq \dfrac{1}{\Lambda^k}\left\{ \displaystyle\sum_{r=1}^{q} \gamma_{q-r}^k \| c^k(s-r:\nu-r)\| + s\|c^k(s-q:\nu-q)\| \right\} \\[2ex] |c_k^k(s:\nu)| \leqq \dfrac{1}{s}\left\{ \displaystyle\sum_{r=1}^{q} \gamma_{q-r}^k \| c^k(s+q-r:\nu+q-r)\| \right\} \\[2ex] \|c^k(s:\nu)\| = \max\limits_{j\neq k} |c_j^k(s:\nu)| \end{cases}
$$

が得られる。 この不等式と命題4とから，次を得る。

命題 5

$$
|||c^k(s:\nu)||| = \max_j |c_j^k(s:\nu)|
$$

とすると，充分大きい s に対して，

$$
(2.9)\quad |||c^k(s:\nu)||| \leqq \left(\frac{\delta^k}{\Lambda_k}\right)^{\left[\frac{\nu-1}{q}\right]} (1+\varepsilon)^{\left[\frac{\nu-1}{q}\right]} M^k s^{\left[\frac{\nu-1}{q}\right]}
$$

が成立つ。 定数 δ^k, M^k は γ_r^k $(0\leqq r\leqq q-1)$，即ち $B_{q-1}, B_{q-2}, \ldots, B_0$ によってきまる。 ε は任意正数。

このように，先ず係数 $c_j^k(s:\nu)$ $(j=1,2,\ldots n)$ を評価しておいて，次に各成分 $h_j^k(s)$ の s が大きいときの評価式を求める。 それは不等式

$$(2.10) \qquad |h_j^k(s)| \leqq \sum_{\nu=1}^{s} \| C^k(s:\nu) \| \, |h_k^k(s-\nu)|$$

$$(j=1,2,\ldots,n)$$

から、導き出される。詳しいことは略すが、

$$\| H^k(s) \| = \max_j |h_j^k(s)|$$

とおけば、

$$\| H^k(s) \| \leqq \left(\frac{\delta^k \eta^k}{\Lambda^k}\right)^{\left[\frac{s-1}{q}\right]} (1+\varepsilon)^{\left[\frac{s-1}{q}\right]} \hat{M}^k \, s^{\left[\frac{s-1}{q}\right]}$$

が得られる。このことは次を意味するのである。

命題 6

$$(2.11) \qquad \varlimsup_{s \to \infty} \sqrt[s]{\frac{\| H^k(s) \|}{s^{\frac{s-1}{q}}}} \leqq \left(\frac{\delta^k \eta^k}{\Lambda^k}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ここで、η^k は 1 より大きい定数

このように、評価式によって、上の結果を得たわけであるが、その計算は全くスマートさに欠ける。単独微分方程式を扱った論文 [5] においては Perron-Poincaré の定理を使うことにより、ある程度、整理されたが、E.B. Van Vleck による差分方程式系に対する Perron-Poincaré

型の結果はあるものの，差分方程式系(2.1)は特異型(最高階の行列は正則でない!!)であって，Van Vleck の結果も，すぐには使えない。ともかくも，"整った形の事実"が得られない場合には，がむしゃらな計算で，ひとまず，何かを引き出し，それをじっとながめて，内に秘めたる美わしき姿を探す以外はあるまい。

論文[5]において，$g_1^{(k,l)}(m)$ の漸近行動については解析した。扇形領域 $|\arg(m-\mu_k+\rho)|<\pi-\delta$ ($\delta>0$ は小さい数)において

$$(2.12)\quad g_1^{(k,l)}(m) \sim \left(\lambda_k^{-\frac{1}{q}}\omega^{l-1}\right)^{-m} \exp\left\{-\left(\frac{m+1}{q}\right)\log m + \frac{m}{q} + \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\right)\log m + m\,O\left(m^{-\frac{1}{q}}\right)\right\}\left\{\beta_1^{(k,l)} + O\left(m^{-\frac{1}{q}}\right)\right\}$$

$$\left(\beta_1^{(k,l)} \text{ は定数，} \quad \omega = \exp\left(\frac{2\pi}{q} i\right)\right)$$

が成立つ。

m を一つ固定しておけば

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{\left|g_1^{(k,l)}(m+s)\right| s^{\frac{s-1}{q}}} \leqq |\lambda_k|^{\frac{1}{q}} e^{\frac{1}{q}}$$

となり，命題6とから，結局

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{\|H^k(s)\|\left|g_1^{(k,l)}(m+s)\right|} \leqq \left(\frac{|\lambda_k|\,\delta^k \eta^k e}{\Lambda^k}\right)^{\frac{1}{q}}$$

が得られ，条件

(2.13) $\left(\dfrac{|\lambda_k|\,\delta_\eta^k \eta^k e}{\Lambda^k}\right) < 1$

があれば，$F_1^{(k,l)}(m)$ が well-defined であることがわかる。

$g_j^{(k,l)}(m)$ の漸近行動については (2.12) の漸近展開式を微分すればよい。(W. Wasow [6] §8 参照)

(2.14) $$g_j^{(k,l)}(m) \sim \left(\lambda_k^{-\frac{1}{q}}\omega^{l-1}\right)^{-m} \exp\left\{-\left(\frac{mH}{q}\right)\log m + \frac{m}{q} + \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)\log m + m\,O(m^{-\frac{1}{q}})\right\}\left(\log\lambda_k\omega^{1-l} - \log m\right)^{j-1} \times \left\{\beta_j^{(k,l)} + O(m^{-\frac{1}{q}})\right\}$$

となり，この式から，同様に上の条件 (2.13) があれば $F_j^{(k,l)}(m)$ も well-defined であることがわかる。最後に $F_j^{(k,l)}(m)$ の漸近行動

(2.15) $$F_j^{(k,l)}(m) \sim H^k(0)\, g_j^{(k,l)}(m)\left\{1+O(m^{-\frac{1}{q}})\right\}$$

も，論文 [5] におけると同様の考察により得られることを注意しておく。

参考文献

[1] K. Okubo : J. Math. Soc. Japan. 15 (1963), 268 – 288

[2] K. Okubo : Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 1 (1965) 99 – 128

[3] M. Kohno : Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 2 (1966) 269 – 305

[4] M. Kohno : Jap. J. Math., 40 (1970) 11 – 62

[5] M. Kohno : Hiroshima Math. J., 4 No2. (1974) to appear

[6]. W. Wasow : Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Pub. (1966)