

Reduced b -function

佐藤 幹夫 述^々
矢野 環 記.

これは、Reduced b -函数についての、佐藤先生の
講演、個人的談話、unofficial prints 等から組み立てたもの
である。その他色々補足がある。

この方面はあまり開拓されていないが、本来、 b の性質
よりも、理論的にはおつかいやすくなるのではないかと思われ

- §1. 定義・基本性質 — b, b', c, ω —
- §2. $b(s)$ の min. poly. と Γ の表現 — $M(s)$ —
- §3. Quasi-hom isolated sing. Γ の b .

§1. 定義. 基本性質 — $\bar{b}, \bar{b}', c_\infty$ —

$b(s)$ は, $P(s)f^{s+1} = b(s)f^s$ とする, monic, degree 最小なものである。これに任じ、monic な $\mathbb{C}[s]$ の元連 $b_1 (= b), b_2, \dots, b_\nu, \dots$ を次の様に定義する。

$$\text{Def. 1} \quad (b_\nu(s)) \equiv [\mathcal{D}[s]f^{s+\nu} : f^s]_{\mathbb{C}[s]}$$

f の巾乗 f^ν の b 函数を $b_{f\nu}(s)$ とするは、

$$\text{Cor. 2} \quad (b_{f\nu}(s)) = (b_\nu(\nu s))$$

$$\text{Thm. 3} \quad \exists! \bar{b}(s), \bar{b}'(s), c_\nu(s), c_\infty(s), c'_\nu(s) \\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$$

$$b_\nu(s) = [\bar{b}(s)]_\nu c_\nu(s+\nu) \\ = c'_\nu(s) [\bar{b}'(s)]_\nu$$

$$\nu \leq \nu' \Rightarrow c_\nu(s) | c_{\nu'}(s); \quad \nu \geq \nu_0 \Rightarrow \begin{cases} c_\nu(s) = c_\infty(s) \\ c'_\nu(s) = c_\infty(s) \end{cases}$$

(c'_ν についても同様).

$$\text{こゝに, } [\varphi(s)]_\nu = \varphi(s)\varphi(s+1)\dots\varphi(s+\nu-1)$$

$\bar{b}(s)$ を f の right reduced b -fn
 $\bar{b}'(s)$ を " left " " と呼ぶ。

$$\text{Cor. 5} \quad \nu \geq \nu_0, \quad \bar{b}(s) = \frac{b_{\nu+1}(s)}{b_\nu(s+1)}$$

$$\bar{b}'(s) = \frac{b_{\nu+1}(s-\nu)}{b_\nu(s-\nu)}$$

$\bar{b}(s)$ は, f^s の analytic continuation に最適であり,
通常 reduced b とは, $\bar{b}(s)$ の ∞ をさし ($b_{red}(s)$ と
かく) よって, 今後 b は $\bar{b}(s)$ を主体に用いる. (b の
立場によつては $\bar{b}'(s)$ も有効である. 又, mixed b -fn を
定義しよう.

$$\bar{b}(s) = \prod (s + \alpha_j) \quad \gamma(s) = \prod P(s + \alpha_j) \text{ とすれば,}$$

$$P_\nu(s) f^{s+\nu} = \bar{b}_\nu(s) f^s \text{ より,}$$

$$\frac{1}{C_\infty(s+\nu)} P_\nu(s) \left(\frac{1}{\gamma(s+\nu)} f^{s+\nu} \right) = \frac{1}{\gamma(s)} f^s$$

よつて, $\text{Re } s \gg 0$ かつ, $\frac{1}{\gamma(s)} f^s$ は $s \in \mathbb{C} \cap \text{接続}$ する.
 $\bar{b}'(s)$ では, $C_\infty(s)$ の零点をかせかきする.

example.

$$f = x^4 + y^4$$

$$b(s) = (s+1) \cdot (s+\frac{3}{4}) (s+\frac{3}{4}) (s+\frac{5}{4}) (s+\frac{5}{4}) (s+\frac{6}{4}) (s+\frac{6}{4})$$

$$\bar{b}(s) = (s+1) \cdot (s+\frac{3}{4}) \dots \dots \dots (s+\frac{5}{4})$$

$$\bar{b}'(s) = (s+1) \cdot (s+\frac{3}{4}) \dots \dots \dots (s+\frac{6}{4})$$

$$C_\infty(s) = C_1(s) = s + \frac{2}{4} =$$

一般の quasi-hom. isolated の場合には γ は p をさす.

< 定理の証明 >

- lemma $b_{\nu+\nu'}(s) \mid b_\nu(s) \cdot b_{\nu'}(s+\nu)$ ①
- $b_\nu(s) \mid b_{\nu+\nu'}(s)$ ②
- $b_{\nu'}(s+\nu) \mid b_{\nu+\nu'}(s)$ ③

\therefore $b_{\nu'}(s+\nu) b_\nu(s) f^s \in \mathcal{D}(s) b_{\nu'}(s+\nu) f^{s+\nu} \subset \mathcal{D}(s) f^{s+\nu+\nu'}$

$b_{\nu+\nu'}(s) f^s \in \mathcal{D}(s) f^{s+\nu+\nu'} \subset \mathcal{D}(s) f^{s+\nu+\nu'}$

$b_{\nu+\nu'}(s) f^{s+\nu} \in f^\nu \mathcal{D}(s) f^{s+(\nu+\nu')} \subset \mathcal{D}(s) f^{(s+\nu)+\nu'}$

$b(-a) = 0$ の根 α , $\text{mod } Z$ で分類し, $\{\alpha_1\}, \dots, \{\alpha_j\}$ とする.

$$\{\alpha_j\} \equiv \{\alpha_j, \alpha_j + i_j^{(1)}, \dots, \alpha_j + i_j^{(n_j-1)}\} \quad \alpha_i \equiv \alpha_j \pmod{Z}$$

$$i_j^{(k)} < i_j^{(k+1)} \quad \text{とす. } 1 + i_j^{(n_j-1)} = l(\alpha_j) \text{ と記す.}$$

① による $l(\alpha)$, $b_\nu(\alpha)$ の任意の factor $\rho + \beta$ には $l(\alpha)$, $\exists j$, $\beta \equiv \alpha_j \pmod{Z}$, $\beta \geq \alpha_j$. 又, 整数環では各 group $\{\alpha_j\}$ ごとに, 対応する factors が成り立つことと想起し, γ の factor $\rho + \alpha_j$ と τ , $\rho + \alpha_j \mapsto \rho + 1$ とすれば, 結局

$$b_\nu(\alpha) = \prod_{i=1}^{\nu-1} (\rho + i)^{\mu_{\nu,i}} \quad \nu \geq 1 \text{ による.}$$

$$(b(\alpha) = (\rho+1)^{\mu_{1,1}} \dots (\rho+r)^{\mu_{1,r}} \quad \nu_{1,0} \neq 0, \nu_{1,r} \neq 0)$$

この上 j による $l(\alpha)$, ①②③ は次の形になる.

$$\mu_{\nu+\nu', i} \leq \mu_{\nu, i} + \mu_{\nu', i-\nu}$$

$$\mu_{\nu, i} \leq \mu_{\nu+\nu', i}$$

$$\mu_{\nu', i-\nu} \leq \mu_{\nu+\nu', i}$$

$$\text{又, } \mu_{\nu, i} = 0 \quad i \geq \nu+r, \quad (\mu_{\nu, i} = 0 \quad \nu \leq 0 \text{ or } i \leq 0)$$

Claim

i) $\nu \geq 1, 1 \leq i \leq r-1$ かつ $\nu \neq i$, $\mu_{\nu, i} = \mu_i$ (etc)

ii) $i \geq r, 1 \leq p \leq r-1$, $\mu_{\nu, \nu+p} = \mu'_p$ (etc)

iii) $\nu \geq i \geq r$ かつ $\nu \neq i$, $\mu_{\nu, i} = \mu$ (etc)

iv) $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{r-1} \leq \mu \leq \mu'_1 \geq \dots \geq \mu'_{r-1}$

v) $\mu_k + \mu'_k \geq \mu$

\therefore) $j \geq i$ $\mu_{j, i} \leq \mu_{i, i} + \mu_{j-i, 0} = \mu_{i, i}$

$\mu_{i, i} \leq \mu_{j, i} \quad \therefore \mu_{j, i} = \mu_{i, i}$

特に $i=1, \dots, r-1$ かつ $\nu \neq i$ $\mu_i \equiv \mu_{i, i} \geq i < \nu$,

$i \leq j \Rightarrow \mu_{i, i} \leq \mu_{j, i}$ より, $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{r-1}$

$i \geq r$ $\mu_{j,i} \leq \mu_{i-r,i} + \mu_{j-i+r,r} = \mu_{j-i+r,r}$
 $\mu_{j-(i-r),r} \leq \mu_{j,i} \quad \therefore \mu_{j,i} = \mu_{j-i+r,r}$
 $j < i$ かつ $r = i - j \geq 1$, $\mu_{r'} = \mu_{r-r',r} (= \mu_{j,r+j})$
 $r < r'$, $r < r' \Rightarrow \mu_{r'} = \mu_{r-r',r} \geq \mu_{r-r',r} = \mu_{r'}$
 $\therefore \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{r-1}$.

$j \geq i \geq r$ $= a$ かつ b , a かつ $b > a$ 同時に成立して
 $\mu_{i,i} = \mu_{j,i} = \mu_{(j-i)+r,r}$. \therefore かつ $\forall j \geq i \geq r$
 \therefore $\mu_{j,i} = \mu_{r,r} \equiv \mu$.

$\forall i \geq r, \mu_{r-1} = \mu_{r-1,r-1} \leq \mu_{r,r} \geq \mu_{r-1,r} = \mu_1$
 又, $\mu_k + \mu_k = \mu_{k,k} + \mu_{r-k,r} \geq \mu_{r,r} = \mu$.

$$\begin{cases} \beta_1 = \mu_1 \\ \beta_2 = \mu_2 - \mu_1 \\ \beta_{r-1} = \mu_{r-1} - \mu_{r-2} \\ \beta_r = \mu - \mu_{r-1} \end{cases} \quad \begin{cases} \beta'_1 = \mu - \mu_1 \\ \beta'_2 = \mu_1 - \mu_2 \\ \vdots \\ \beta'_r = \mu'_{r-1} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1 = \mu_1 + \mu'_1 - \mu \\ \vdots \\ \gamma_{r-1} = \mu_{r-1} + \mu'_{r-1} - \mu \end{cases}$$

\therefore $\bar{h}(\lambda) \equiv (\lambda+1)^{\beta_1} \dots (\lambda+r)^{\beta_r}$ $C_\infty(\lambda) = (\lambda+1)^{\gamma_1} \dots (\lambda+r-1)^{\gamma_{r-1}}$
 $\bar{h}'(\lambda) \equiv (\lambda+1)^{\beta'_1} \dots (\lambda+r)^{\beta'_r}$

とかけば、 \bar{h} の分解をたす。

$C_\nu(\lambda)$ の定義と $C_\nu | C_\infty$ のまじりや明かしてある。

一般には、各 $\{\alpha_j\}$ で行えるので、乗すればよい。

quod erat demonstrandum.

証明方法、又 \bar{h}, c 構成の

Cor. 6 $\nu_0 \leq \max_j l(\alpha_j)$ とわかる。

$$\bar{h}(\lambda) C_\infty(\lambda+1) = C_\infty(\lambda) \bar{h}'(\lambda)$$

$$C_\infty(\lambda) \mid [\bar{h}(\lambda)]_{\nu_0}, [\bar{h}'(\lambda - \nu_0)]_{\nu_0}$$

6

この式 = 式 $\frac{\bar{b}'(a)}{\bar{b}(a)} = \frac{C_{\infty}(a+1)}{C_{\infty}(a)}$ を用いければ、2つの Prop を得る。
 $\frac{C_b(a+b)}{C_b'(a)} = \left[\frac{\bar{b}'(a)}{\bar{b}(a)} \right]_b = \frac{C_{\infty}(a+b)}{C_{\infty}(a)}$ (ただし $\bar{b}(a) \neq 0$)
 従って、

Prop. 7 If $C_b(a) = C_b'(a)$, then $C_b(a) = C_b'(a) = C_{\infty}(a)$.

Prop. 8 $C_{\infty}(a)$ が cte の時、 $\forall a$ 時に $\bar{b}'(a) = \bar{b}(a)$

従って、 $\bar{b}(a) = \bar{b}'(a)$ の時以外では、right reduced b と、left reduced b は異なる。だが、根 α , $\text{mod } 2$ で $\neq \tau$ 各 group の元数は、 α に等しい。

§.2 \bar{b} の min. poly. と 1 の表現 — $\mathcal{M}(a)$ —

$b(a)$ は $\mathcal{M} = \mathcal{A}[f]/\mathcal{A}[f]^{a+1}$ における a の最小多項式であった。 $\bar{b}(a)$ も、同様に \bar{a} ; $\bar{a} = a$ を説明し、reduced b の一般化によって与えられる。

記法を少 (変更) する。

$$P_\nu(a) \quad \nu=0, 1, 2, \dots \quad \mathcal{A}$$

$$P_\nu(a) f^a = C_\infty(a) \bar{b}(a-1) \dots \bar{b}(a-\nu) f^{a-\nu}$$

となる f のとき。 $P_\nu(a)$ は $\text{mod } g[f]$ で unique.

$P_0(a) (= C_\infty(a)), P_1(a), \dots$ で generate される

$\mathcal{A}[f]/g[f]$ の submodule は $C_\infty(a) \frac{\mathcal{A}[f]}{g[f]}$ とする。

$$f[s] \in C_{\omega(s)} \mathcal{F}[s] \subset \mathcal{G}[s] \subset \mathcal{F}[s] \subset \frac{1}{C_{\omega(s)}} \mathcal{G}[s].$$

$$P_m[s] \in \mathcal{G}[s]P_0[s] + \dots + \mathcal{G}[s]P_{m-1}[s] \text{ とある } m \in \mathbb{Z}.$$

i.e. $P_m[s] + A_1[s]P_{m-1}[s] + \dots + A_m[s]P_0[s] = 0 \pmod{f[s]}$

$$P_m'[s]P_n[s+n] = C_{\omega(s)} P_{m'+n}[s+n] \pmod{f[s+n]}$$

に注意し、 $P_n[s+n]$ を s の多項式として $C(s)$ で除くと、 $(s \mapsto s-n)$

$$P_{m+n}[s] + A_1[s-n]P_{m+n-1}[s] + \dots + A_m[s-n]P_n[s] = 0 \pmod{f[s]}.$$

$$\therefore \mathcal{F}[s] = \frac{1}{C_{\omega(s)}} (\mathcal{G}[s]P_0[s] + \dots + \mathcal{G}[s]P_{m-1}[s])$$

従って、 $\pi(s) = \mathcal{F}[s] / f[s] \text{ と } \mathbb{Z} < \mathbb{Z}$,

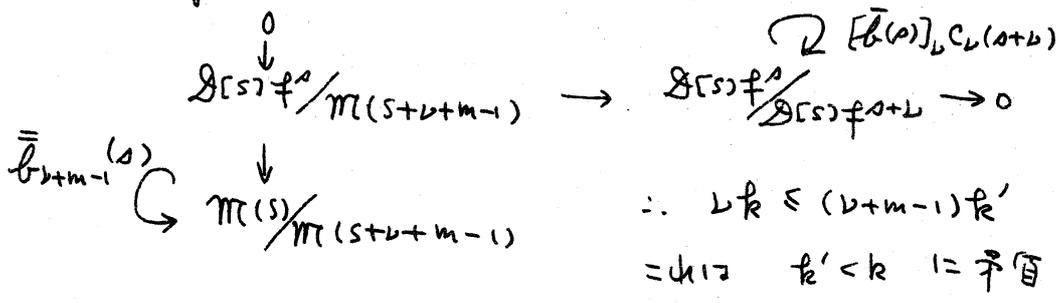
$$= \mathcal{G}[s]f^0 + \overline{b(s-1)}\mathcal{G}[s]f^{s-1} + \dots + [\overline{b(s-m+1)}]_{m-1}\mathcal{G}[s]f^{s-m+1}$$

$$\overline{\pi}_\nu(s) \equiv \pi(s) / \pi(s+\nu) \text{ と } \mathbb{Z} < \mathbb{Z}.$$

Thm. 9 $[\overline{b(s)}]_\nu$ は、 $\overline{\pi}_\nu(s)$ に對して endomorphism \mathcal{A} の minimal polynomial である。

\therefore) $[\overline{b(s)}]_\nu, \pi(s) \supset \pi(s+\nu)$ は明らか。 $\overline{\pi}_\nu(s)$ に對して \mathcal{A} の minimal poly. は $\overline{b}_\nu(s)$ である、 $\overline{b}_\nu(s)$ は k 次であるとする。

if $\exists \overline{b}_{\nu_0}(s) \neq [\overline{b(s)}]_{\nu_0}$, g.c.d. は ≥ 1 ,
 $\deg \overline{b}_{\nu_0} < \deg [\overline{b}]_{\nu_0}$ である。 $\therefore \exists k' < k$ s.t.
 $\deg \overline{b}_{\nu} < \nu k' \quad (\nu \gg 0)$



さらに, $\pi(s)$ はこの性質をもつ最小のものである。
これを説明するたため, いくつか一般的事項を準備しよう。

$$\begin{aligned} \pi(s) &\text{ は, } \mathcal{D}[s] \text{ module であって,} \\ \exists m_0, \quad \mathcal{D}[s] f^{s-m_0} &\supset \pi(s) \supset \mathcal{D}[s] f^s \\ \pi(s) &\supset \pi(s+1) \end{aligned}$$

を証明するものとする。

$b_{\pi, \nu}(s)$ を $\pi(s)/\pi(s+\nu) \ni 0$ の min. poly とする。
(存在は上の条件から保証される。) $b_{\pi, 1}$ を b_{π} と記す。

$$\pi(s) \supset \pi(s+\nu) \supset \pi(s+\nu+\nu') \quad (*)$$

$$\begin{cases} b_{\pi, \nu+\nu'}(s) \mid b_{\pi, \nu}(s) b_{\pi, \nu'}(s+\nu) \\ b_{\pi, \nu}(s) \mid b_{\pi, \nu+\nu'}(s) \quad , \quad b_{\pi, \nu}(s+\nu) \mid b_{\pi, \nu'}(s) \end{cases}$$

従って, 定理 3 の証明はそのまま適用して成立する。

Thm 10. $\exists \bar{b}_{\pi}, \bar{b}'_{\pi}, C_{\pi, \nu}, C'_{\pi, \nu}, C_{\pi}$

$$\begin{aligned} b_{\pi, \nu}(s) &= [\bar{b}_{\pi}(s)]_{\nu} C_{\pi, \nu}(s+\nu) \\ &= C'_{\pi}(s) [\bar{b}'_{\pi}(s)] \end{aligned}$$

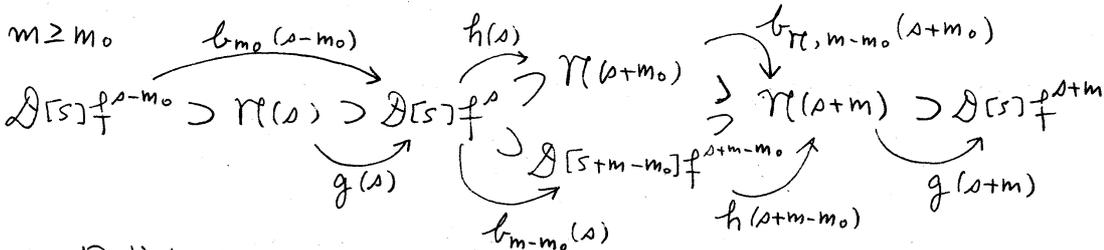
$\nu \leq \nu' \quad C_{\pi, \nu} \mid C_{\pi, \nu'}; C'_{\pi, \nu} \mid C'_{\pi, \nu'}; \exists \nu_0 \leq \nu, C_{\pi, \nu} = C'_{\pi, \nu} = C_{\pi}$

$$\bar{b}_{\pi}(s) C_{\pi}(s+1) = C_{\pi}(s) \bar{b}'_{\pi}(s)$$

\bar{b}'_{π} は \bar{b}_{π} と C_{π} から定まる故, pair (\bar{b}_{π}, C_{π})
により, π の特徴づけを考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(s) &\rightsquigarrow (\bar{b}_n, \bar{c}_n) \quad \text{と } \delta < \varepsilon \text{ とき,} \\ \mathcal{D}[s] \neq 0 &\rightsquigarrow (\bar{b}, c), \quad \mathcal{N}(s) \rightsquigarrow (\bar{b}, 1) \end{aligned}$$

$A \supset B$ で, A/B にたいして δ a min. poly $A \supset B$
 が $a(s)$ であるとき, 右のように表す $\xrightarrow{a(s)}$



上の図式より,

1. $b_{m-m_0}(s) \mid b_{rc, m}(s); b_{rc, m-m_0}(s+m_0) \mid b_m(s)$
2. $h(s) \mid b_{m_0}(s), b_{rc, m_0}(s)$
 $g(s) \mid b_{m_0}(s-m_0), b_{rc, m_0}(s)$
3. $b_m(s) \mid h(s) b_{rc, m-m_0}(s+m_0) g(s+m)$
 $b_{rc, m}(s) \mid g(s) b_{m-m_0}(s) h(s+m-m_0)$

$$\deg \bar{b} = d, \quad \deg \bar{b}_{rc} = d' \quad \text{と } \delta < \varepsilon.$$

十分大なる m に対して, $1 \leq \delta < \varepsilon$ となる

$$(m-m_0)d + \deg c \leq m d' + \deg c_{rc}$$

$$(m-m_0)d + \deg c_{rc} \leq m d + \deg c$$

$m \rightarrow \infty$ と (7), $d = d'$. $\forall \varepsilon$ 上の図式より,

$$|\deg c_{rc} - \deg c| \leq m \delta.$$

2. より $\deg g, \deg h \leq \text{mod} + \min(\deg C_{m_0}, \deg C_{r, m_0})$

3. より ~~$m_0 + 1$~~ $\text{mod} + |\deg C_r - \deg c| \leq \deg g + \deg h$.

\bar{f}_r と \bar{h} は、次数が等しいから、根の個数も一致している。mod. 2 groups の数の一致、各 group の元の個数の一致は容易である。さしに、 \bar{f}_r と \bar{h} は、 \bar{f}_r の mod. 2 group に着目して、次の形にしてよい。

$$\bar{f}_r(x) = (x+n_1) \cdots (x+n_d) \quad n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_d \quad (\text{整数})$$

$$\bar{h}(x) = (x+n'_1) \cdots (x+n'_d) \quad n'_1 \leq n'_2 \leq \cdots \leq n'_d \quad (\dots)$$

1. の式より

$$[(x+n_1) \cdots (x+n_d)]_{m-m_0} C(x+m-m_0) \mid [(x+n'_1) \cdots (x+n'_d)]_m C_r(x+m)$$

両辺の、絶対値最小根の因子を比較すれば、 $n_1 \geq n'_1$ 。

一方、 $\bar{h} = \bar{f}_r$ より

$$[(x+m_0+n'_1) \cdots (x+m_0+n'_d)]_{m-m_0} C_r(x+m) \mid [(x+n_1) \cdots (x+n_d)]_m C(x+m)$$

$$\therefore m_0 + n'_1 \geq n_1 \quad \text{また} \quad n_1 \geq n'_1 \geq n_1 - m_0$$

従って、 $[(x+n_1) \cdots (x+n_d)]_{m-m_0} \mid [(x+n'_1) \cdots (x+n'_d)]_m$ 、 $r_{1,m}(x) = [(x+n'_1) \cdots (x+n'_d)]_m / [(x+n_1) \cdots (x+n_d)]_{m-m_0}$

$$[(x+n_2) \cdots (x+n_d)]_{m-m_0} C(x+m-m_0) \mid r_{1,m}(x) [(x+n'_2) \cdots (x+n'_d)]_m C_r(x+m)$$

$n_1 \leq n_2$ と、 $r_{1,m}(x)$ の式より、 $x+n_2 \mid [(x+n'_2) \cdots (x+n'_d)]_m$ 。

i.e. $n_2 \geq n'_2$ 同様に $n'_i + m_0 \geq n_i$ $i=1, 2, \dots, d$

$$\underline{1 \leq i \leq d} \quad n_i \geq n'_i \geq n_i - m_0$$

即ち、我々の仮定を得た。

Thm. 11

1. $\deg \bar{b}_\pi = \deg \bar{b}$
2. $|\deg c_\pi - \deg c| \leq m \cdot d$
3. \bar{b}_π と \bar{b} の mod. \mathbb{Z} groups の 個数, 各代表元連
 の mod \mathbb{Z} class, 各 group の 元数 $i_k = i'_k$ 一致,
 $\bar{b} \rightsquigarrow (s + \alpha_j)(s + \alpha_j + i_2) \dots (s + \alpha_j + i_d) \quad (i_k \leq i_{k+1})$
 $\bar{b}_\pi \rightsquigarrow (s + \alpha_j + i'_1)(s + \alpha_j + i'_2) \dots (s + \alpha_j + i'_d) \quad (i'_k \leq i'_{k+1})$
 各対応する因子とすければ, $i_k \geq i'_k \geq i_k - m_0$
 $(i_1 = 0)$

一般に, $(\bar{b}_{x_1}, c_{x_1}) = (\bar{b}_{x_2}, c_{x_2})$

$\Rightarrow b_{x_1+x_2} = b_{x_1} = b_{x_2} \quad c_{x_1+x_2} \mid c_{x_1} = c_{x_2}$

$b'_{x_1 \cap x_2} \in b'_{x_1} = b'_{x_2} \quad c_{x_1 \cap x_2} \mid \dots$

$(\bar{b}_\pi, c_\pi) = (\bar{b}, 1)$ の場合, 次の定理がある.

この条件は $b_\pi(s) = \bar{b}(s)$ と同値なことに注意せよ.

$\mathcal{M}'(s) = \{u(s) \in \bigcup_{v=0}^{\infty} \mathcal{D}(s) f^{s-v} \mid \exists m, [\bar{b}(s)]_m u(s) \in \mathcal{M}(s+m)\}$ とおく.*

明らかなに $\mathcal{M}'(s) \supset \mathcal{M}(s)$.

作りかより, $\bar{b}(s) \mathcal{M}'(s) \subset \mathcal{M}'(s+1)$

このことから, $b_{\mathcal{M}'} = \bar{b}_{\mathcal{M}'} = \bar{b}$.

* 例, $\mathcal{D}(s) f^{s-2} \supset \mathcal{M}'(s)$ とおけるが, 証明はできない.

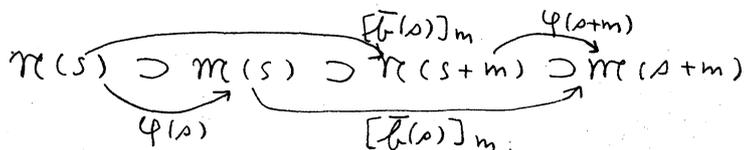
$\pi(\rho)$ は従来ゝ仮定を課す.

Thm.12 $b_{\pi}(\rho) = \bar{b}(\rho) \iff \pi'(\rho) \supset \pi(\rho) \supset \pi(\rho)$

$\therefore \Rightarrow$ 条件より $\pi(\rho+1) \supset \bar{b}(\rho)\pi(\rho) \supset \bar{b}(\rho)\bar{b}(\rho-1)\pi(\rho-1) \dots$

i.e. $\pi(\rho) \supset [\bar{b}(\rho-k)]_k \pi(\rho-k) \supset [\bar{b}(\rho-k)]_k \mathcal{B}(\rho) f^{\rho-k}$

$\therefore \pi(\rho) \supset \pi(\rho)$. この ρ を ρ_0 とし、 $m \geq m_0$



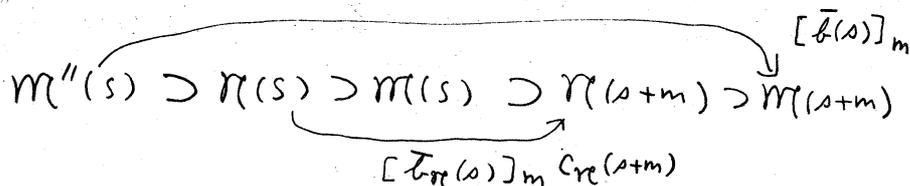
m が十分大になると、 $\min. \text{poly}(\pi(\rho)/\pi(\rho+m) \mathbb{P} \rho) \mid [\bar{b}(\rho)]_m$.

$\rightarrow \pi(\rho) \supset \pi(\rho+m)$ の $[\bar{b}(\rho)]_m$ は best possible.
 また上の \mid は実は等号.

$\therefore \pi'(\rho) \supset \pi(\rho)$

$\Leftarrow \mathcal{B}(\rho) f^{\rho-m_0} \supset \pi(\rho)$ とし、

$\pi''(\rho) = \pi(\rho-m_0) \cap \pi'(\rho)$ とおく. m が十分大になると



$\bar{b}_{\pi}(\rho)$ の根は、Thm. に従い $\bar{b}(\rho)$ の根より ρ が自然数でないもの. しかし、上の図式より、結局 $C_{\pi} = 1$
 $\bar{b}_{\pi} = \bar{b}$ で表わすことができる. Q.E.D.

§3. Quasi-hom. の場合 $\bar{b}(\rho)$

f : weighted hom. isol. sing $(\sum a_i x_i D_i) f = f$
 とする. (f : quasi-hom. isol. sing なら $\sum a_i T_i = 0$ の性質より) (7.1)

$$\frac{t^{a_1} - t}{1 - t^{a_1}} \cdots \frac{t^{a_n} - t}{1 - t^{a_n}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}_+} f_\alpha t^\alpha \quad (7.2) \quad (\text{右辺は有限項})$$

$$b(\rho) = (\rho+1) \prod_{\alpha \neq 0} (\rho + \alpha)$$

$$B(\rho) = (\rho+1) \prod_{\alpha \in \mathbb{Q}_+} (\rho + \alpha)^{q_\alpha} \quad \text{は 固有 多項式 である.}$$

$$\mathcal{M}_\nu = \mathcal{D}(\mathbb{C}) f^\nu / \mathcal{D}(\mathbb{C}) f^{\nu+1} \simeq \mathcal{D} / \mathcal{I}_\nu + \mathcal{D} f^\nu$$

$\mathcal{I}_\nu = \{ P(\alpha, D) \mid P(\alpha, D) f^\nu = 0 \}$. $\mathcal{I}_0 = \sum \mathcal{D}(f_i D_i - f_j D_j)$
 とする. $\nu = 1$ の場合と同様. 又 明し かに,

$$0 \rightarrow (\mathcal{M}_\nu)_{\rho \mapsto \rho+\nu} \rightarrow \mathcal{M}_{\nu+\nu} \rightarrow \mathcal{M}_\nu \rightarrow 0$$

\mathcal{M}_ν に 対し $\rho \rightarrow \text{min. poly.}$ は $b_\nu(\rho)$ である. 固有 多項式
 を $B_\nu(\rho)$ とする. $b_1(\rho) = b(\rho)$, $B_1(\rho) = B(\rho)$.

$B_\nu(\rho) = (\rho+1)_\nu B'_\nu(\rho)$ といふ 表示 でき ます. (上 へ seq.
 へ 明し かに) 原点 へ の 寄与 は $B'_\nu(\rho)$ に なる.

$$0 \leftarrow \text{Hom}((\mathcal{M}_\nu)_{\rho \mapsto \rho+\nu}, B_{\text{pt}}) \leftarrow \text{Hom}(\mathcal{M}_{\nu+\nu}, B_{\text{pt}}) \leftarrow \text{Hom}(\mathcal{M}_\nu, B_{\text{pt}}) \leftarrow 0$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ B'_\nu(\rho+\nu) & & B'_{\nu+\nu}(\rho) \\ & & \uparrow \\ & & B'_\nu(\rho) \end{array}$$

14

$$B'_{\nu+\nu'}(\rho) = B'_\nu(\rho) B'_{\nu'}(\rho+\nu) \quad \therefore B'_\nu(\rho) = [B(\rho)]_\nu$$

$$\therefore B_\nu(\rho) = [\rho+1]_\nu \prod (\rho+\alpha)^{g_\alpha+\dots+g_{\alpha-\nu+1}}$$

min. poly τ (7.17),

$$b_\nu(\rho) = [\rho+1]_\nu \prod_\alpha (\rho+\alpha); (g_\alpha, \dots, g_{\alpha-\nu+1}) \neq 0.$$

従って, $\nu \geq \nu_0$ とし (Cor. 1.5より) 成す。

Thm. f : quasi-geom. isolated sing.

$$\bar{b}(\rho) = (\rho+1) \prod (\rho+\alpha_j)$$

$$\bar{b}'(\rho) = (\rho+1) \prod (\rho+\alpha'_j)$$

ここに, $b(\rho)/(\rho+1)$ の根 α mod. \mathbb{Z} group の最小代表元連 $\{\alpha_j\}$, 最大代表元連 $\{\alpha'_j\}$ とす。

$$\begin{aligned} \therefore \bar{b}(\rho) &= \frac{b_{\nu+1}(\rho)}{b_\nu(\rho+1)} \\ &= \frac{[\rho+1]_{\nu+1} \prod (\rho+\alpha) (g_\alpha, \dots, g_{\alpha-\nu}) \neq 0}{[\rho+2]_\nu \prod (\rho+\alpha) (g_{\alpha+1}, \dots, g_{\alpha-\nu}) \neq 0} \\ &= (\rho+1) \prod (\rho+\alpha) \quad g_\alpha \neq 0, (g_{\alpha+1}, \dots, g_{\alpha-\nu}) = 0. \end{aligned}$$

$\nu \geq \nu_0$ とすれば, $\rho = \text{int}$ の α は, 絶対値最小 ρ となる ρ 存在する。

example. Elementary Singularities.

A_k, D_k, E_6, E_7, E_8

$$b = \bar{b} = \bar{b}'$$

$\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$

$$C_1(\rho) = C(\rho) = \rho + 1$$

($\Rightarrow \tilde{E}_6, \tilde{E}_8$ は 3 変数表示に $\rho + 1$, 2 変数表示に $\rho + \frac{1}{2}$)

example. $f: (\mathbb{C}^n, 0)$ hom. degree r isol. sing. \Rightarrow

$$\bar{f}(\rho) = (\rho + 1) \cdot \left(\rho + \frac{n}{r}\right) \cdots \left(\rho + \frac{n+(r-1)}{r}\right)$$

$$\bar{f}'(\rho) = (\rho + 1) \cdot \left(\rho + \frac{(n-1)(r-1)}{r}\right) \cdots \left(\rho + \frac{n(r-1)}{r}\right)$$

$$C(\rho) = \left(\rho + \frac{n}{r}\right) \cdots \left(\rho + \frac{n(r-1)-r}{r}\right)$$