数理解析研究所講究録
第225巻 1975年 248-261

孤立特異点をもつ超曲面の有限鏡映群による商空間

東大 理 大学院　川崎徹郎

一般にある超平面を不動にする線型変換を鏡映という。$G \subset U(n+1)$ を鏡映から生成される有限部分群とする。その時、G－不変な多項式のつくる環は $(n+1)$－変数の多項式環と同型で、生成元として斉次多項式がとれる。$\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1}$ を代数的に独立な生成元とすると写像

$$\mathbb{C}^{n+1}_z / G \xrightarrow{(\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1})} \mathbb{C}^{n+1}_w$$

は解析空間としての同型を与える。

今、原点に孤立特異点をもつ G－不変な多項式 f を考える。すると f は $\mathbb{C}^{n+1}_w$ 上の多項式 f' で分解される。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n+1}_z \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & & \mathbb{C} \\
\mathbb{C}^{n+1}_z / G \cong \mathbb{C}^{n+1}_w \arrow[urr, "f'"'] & &
\end{tikzcd}$$

df は原点でのみ 0 になるから，df' もそうである。f'の定義する孤立特異点と f'の定義する孤立特異点の関係を調べよう。

1. 回転可能構造と Seifert 形式

定義．　閉多様体 M^n の回転可能構造とは

1) Mの分解　　$M = E \underset{\partial E = \partial N}{\cup} N$.

2) Eの S^1 上の繊維束としての構造　$\varphi : E \longrightarrow S^1$
　（この繊維 Fを回転可能構造の生成元という。）

3) Nの積への分解　$N \cong X \times D^2$．但し Xは$(n-2)$-次元の閉多様体，D^2は２次元円板。（Xを回転可能構造の軸という。）

4) 次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
E \supset \partial E = \partial N \arrow[dr, "\varphi"'] & \cong & X \times S^1 \arrow[dl, "\text{射影}"] \\
& S^1 &
\end{tikzcd}$$

で定義される構造

一般に原点に孤立特異点をもつ多項式 f があると．

$$\begin{cases} S_\varepsilon^{2n+1} = \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - f^{-1}(D_\delta)} \underset{S^{2n+1}\cap f^{-1}(S^1_\delta)}{\cup} S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(D_\delta) \\ \arg f : \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - f^{-1}(D_\delta)} \longrightarrow S^1 \end{cases}$$

$$(\ 0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1 \ )$$

はS^{2n+1}上の回転可能構造を与える。これをfの定める回転可能構造という。(ε, δのとり方によらない。)

繊維空間 $S_\varepsilon^{2n+1} - f^{-1}(D_\delta) \longrightarrow S^1$ はMilnor繊維空間と同型であることに注意しよう。回転可能構造とはMilnor繊維空間の定める構造を微分位相的に一般化，厳密化したものである。

$S^{2n+1} = E \underset{\partial E = \partial N}{\cup} N$, $\varphi : E \to S^1$ をS^{2n+1}上の回転可能構造とする。さらにその生成元FはS^nの花束と同じホモトピー型をもつとする。繊維空間 $E \to S^1$ を $exp : \mathbb{R} \to S^1$ によって引戻そう。

$$\begin{CD} \widetilde{E} @>>> E \\ @V{exp^* \varphi}VV @VV{\varphi}V \\ \mathbb{R} @>{exp}>> S^1 \end{CD}$$

$\mathbb{R}$上の繊維空間は自明だから，自明化 $\theta : F \times \mathbb{R} \to \widetilde{E}$ がある。$t \in S^1$ 上のφの繊維を F_t と書く時，

$\theta_t : F \longrightarrow F_t$ を θ の $F\times\{t\}$ への制限としよう。$\theta_{2\pi}\circ\theta_0^{-1}$ は幾何的モノドロミーである。

この時、Seifert形式とは $H_n(F)$ 上の双一次形式 $\gamma : H_n(F)\otimes H_n(F) \longrightarrow \mathbb{Z}$ で

$$\gamma(x, y) = L_{S^{2n+1}}((\theta_0)_* x, (\theta_\pi)_* y)$$

$$(L_{S^{2n+1}}(\ ,\ ) \text{ は } S^{2n+1} \text{ でのまつわり数})$$

で定義されるものである。詳しくは

$$\beta : H_n(F) \underset{\cong}{\xrightarrow{(\theta_0)_*}} H_n(F_0) \underset{\cong}{\xleftarrow{\partial}} H_{n+1}(S^{2n+1}, F_0) \underset{\cong}{\xleftarrow{D}} H^n(S^{2n+1}-F_0) \underset{\cong}{\xrightarrow{i^*}} H^n(F_\pi) \underset{\cong}{\xrightarrow{(\theta_\pi)^*}} H^n(F)$$

とおくとき（D は Poincaré－Lefschetz 双対　$i : F_\pi \subset S^{2n+1}-F_0$）

$$\gamma(x, y) = \langle \beta x, y \rangle$$

である。

<u>定理</u>（Kato）．$n \geqq 3$ の時、S^{2n+1} 上の、生成元が S^n の花束と同じホモトピー型をもつ回転可能構造と、有限生成自由 $\mathbb{Z}$－加群上のユニモジュラー双一次形式（$\det = 1$ の行列で代表される双一次形式）とは、Seifert形式によって双射的に対応する。

さらに H_nF のある基底について、交わり行列 S,

モノドロミー行列ΦはSeifert行列Γによって次の様に表わされる。

$$S = -\Gamma + (-1)^{n+1}\,{}^t\Gamma$$
$$\Phi = (-1)^{n+1}\,{}^t\Gamma\cdot\Gamma^{-1}$$

系. fを原点に孤立特異点をもつ多項式とする。fの定める回転可能構造はfのSeifert形式により完全に定まる。（微分同型を除いて）

注意. 与えられたユニモジュラー行列がいつ多項式のSeifert行列になるかはわからない。但し多項式で定まるSeifert行列はある基底をとると対角成分が$(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$の上三角行列になることがわかる（Durfee）

2. G-不変多項式のSeifert形式

$G\subset U(n+1)$を鏡映から生成される有限部分群，fを原点に孤立特異点をもつG-不変多項式，$f=f'\circ\pi$をfの分解とする。

命題. S^{2n+1}/GはS^{2n+1}に位相同型。

証明. S^{2n+1} を $\mathbb{C}_z^{n+1}-\{0\}$ の線型な $\mathbb{R}^+$-作用による商空間と考える。すると

$$S^{2n+1}/G = (\mathbb{C}_z^{n+1}-\{0\}/\mathbb{R}^+)/G.$$

ところが $\mathbb{C}_z^{n+1}-\{0\}$ 上の $\mathbb{R}^+$-作用と G-作用は交換するから、

$$S^{2n+1}/G = (\mathbb{C}_z^{n+1}-\{0\}/G)/\mathbb{R}^+$$

ここで, $\mathbb{C}_z^{n+1}-\{0\}/G \cong \mathbb{C}_w^{n+1}-\{0\}$ である。$\mathbb{C}_w^{n+1}$ 上に導入される $\mathbb{R}^+$-作用は

$$t\cdot(w_0,\cdots,w_n) = (t^{d_1}w_0,\cdots,t^{d_{n+1}}w_n),\quad t\in\mathbb{R}^+$$

$(d_1,\cdots,d_{n+1}$ は $\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1}$ の次数$)$

である。ところがこの作用は線型な $\mathbb{R}^+$-作用と位相的に同型である。従って結論を得る。

今 f を G-不変としたから、f の定める回転可能構造

$$\begin{cases} S_\varepsilon^{2n+1} = \overline{S_\varepsilon^{2n+1}-f^{-1}(D_\delta)} \underset{S_\varepsilon^{2n+1}\cap f^{-1}(S_\delta^1)}{\cup} S^{2n+1}\cap f^{-1}(D_\delta) \\ \arg f:\ \overline{S_\varepsilon^{2n+1}-f^{-1}(D_\delta)} \longrightarrow S^1 \end{cases}$$

は G-安定なことに注意しよう。G-作用による商空間を作

ると、

$$\begin{cases} S_\varepsilon^{2n+1}/G = \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - f^{-1}(D_\delta)}/G \underset{(S^{2n+1}\cap f^{-1}(S_\delta^1))/G}{\cup} (S_\varepsilon^{2n+1}\cap f^{-1}(D_\delta))/G \\ \quad \mathrel{\text{\rotatebox{90}{$\cong$}}} \\ \quad S^{2n+1} \\ \arg f/G : \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - f^{-1}(D_\delta)}/G \longrightarrow S^1 \end{cases}$$

は再び S^{2n+1} 上の(位相的な)回転可能構造を定義する。
ここで $\arg f$ の t 上の繊維を F_t, $\arg f/G$ の t 上の繊維を F'_t とおこう。G－作用は繊維を保存するから $F'_t = F_t/G$ である。

今, $\mathbb{C}_w^{n+1}$ の中の ε－球面 $S_{w,\varepsilon}^{2n+1}$ と $S_{z,\varepsilon}^{2n+1}/G$ とは違うことに注意しよう。しかし $S_{w,\varepsilon}^{2n+1}$ と $S_{z,\varepsilon}^{2n+1}/G$ の間の位相同型でその上の函数 f' と f/G の値の偏角を一致させるものがある。このことは S_ε^{2n+1}/G 上の回転可能構造が、f' の定める回転可能構造と、位相的に同型であることを示している。以後我々は両者を同一視する。

<u>定理</u>. G, f, f' は今までの通り、F, F' をそれぞれ f, f' の Milnor 繊維空間の繊維とする。$\pi : F \to F/G \cong F'$ を自然な射影とする。この時, f, f' の定める Seifert 形式 γ, γ' につき、次のことが成立つ。$x \in H_n(F)^G$, $y \in H_n(F)$ とすると

$$\gamma'(\pi_* x, \pi_* y) = |G| \cdot \gamma(x, y)$$

系. F, F' の交わり形式 S, S' の間には次の関係が成立つ。
$x \in H_n(F)^G$, $y \in H_n(F)$ について

$$S'(\pi_* x, \pi_* y) = |G| \cdot S(x, y)$$

定理の証明. 次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\beta: H_n(F) & \underset{\cong}{\xrightarrow{(\theta_0)_*}} & H_n(F_0) & \underset{\cong}{\xleftarrow{\partial}} & H_{n+1}(S^{2n+1}_\varepsilon, F_0) & \underset{\cong}{\xleftarrow{D}} & H^n(S^{2n+1}_\varepsilon - F_0) & \underset{\cong}{\xrightarrow{i^*}} & H^n(F_\pi) & \underset{\cong}{\xrightarrow{(\theta_\pi)^*}} & H^n(F) \\
\downarrow \pi_* & \circlearrowleft & \downarrow \pi_* & \circlearrowleft & \downarrow \pi_* & (*) & \uparrow \pi^* & \circlearrowleft & \uparrow \pi^* & \circlearrowleft & \uparrow \pi^* \\
\beta': H_n(F') & \underset{\cong}{\xrightarrow{(\theta'_0)_*}} & H_n(F'_0) & \underset{\cong}{\xleftarrow{\partial}} & H_{n+1}(S', F'_0) & \underset{\cong}{\xleftarrow{D'}} & H^n(S' - F'_0) & \underset{\cong}{\xrightarrow{i'^*}} & H^n(F'_\pi) & \underset{\cong}{\xrightarrow{(\theta'_\pi)^*}} & H^n(F')
\end{array}$$

ここで $S' = S^{2n+1}_\varepsilon / G \ (\cong S^{2n+1})$, すると

$$\gamma(x, y) = \langle \beta x, y \rangle \quad ; \quad \gamma'(x', y') = \langle \beta' x', y' \rangle$$

である。上列のすべての写像は G-同変, (*)を除いてすべて可換である。(*)の部分を調べよう。S^{2n+1}_ε の基本類を $[S] \in H_{2n+1}(S^{2n+1}_\varepsilon)$, S^{2n+1}_ε / G の基本類を $[S'] \in H_{2n+1}(S^{2n+1}_\varepsilon / G)$ とすると,

$$\pi_*[S] = |G|\cdot[S']$$

である。従って

$$\pi_* \circ D \circ \pi^* = |G|\cdot D'$$

今, $H^n(S_\varepsilon^{2n+1} - F_0)$, $H^n(S' - F_0')$ は共に $\mathbb{Z}$ の直和で,

$$\pi_* : H^n(S' - F_0' ; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^n(S_\varepsilon^{2n+1} - F_0 ; \mathbb{Q})^G$$

は同型だから, $x \in H_n(F)^G$ に対し

$$D^{-1} \circ \partial^{-1} \circ (\theta_0)_* x = \pi^* \alpha$$

となる $\alpha \in H^n(S' - F_0' ; \mathbb{Q})$ がある。従って

$$\pi^* \beta' \pi_* x = |G|\cdot \beta x$$

これより直ちに結論が得られる。

注意. 特に f が重みつき斉次の時, f のモノドロミーと G の作用は交換する。従って次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} H_n(F) & \xrightarrow{\pi_*} & H_n(F') \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi'} \\ H_n(F) & \xrightarrow{\pi_*} & H_n(F') \end{array} \qquad (\Phi, \Phi', \text{はモノドロミー})$$

3. 例

I. G を $(n+1)$-文字 $\{0,1,\cdots,n\}$ の置換のつくる対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ とする。$\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}$ の $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の作用は

$$\sigma\cdot(z_0,\cdots,z_n)=(z_{\sigma^{-1}(0)},\cdots,z_{\sigma^{-1}(n)})$$

である。f として Fermat 型の多項式

$$f(z)=z_0^d+\cdots+z_n^d$$

をとる。$\mathfrak{S}_{n+1}$ で不変な多項式の全体は基本対称式 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{n+1}$ で生成されるから、f' は重みが $(d;1,2,\cdots,n+1)$ の重みつき斉次多項式である。f' の Milnor 数は $\binom{d-1}{n+1}$ である。f, f' の Milnor 繊維空間の繊維 F, F' はそれぞれ $V_d=\{z\in\mathbb{C}_z^n \mid f(z)=1\}$ $V_d'=\{w\in\mathbb{C}_w^{n+1}\mid f'(w)=1\}=V_d/\mathfrak{S}_{n+1}$ と同一視される。

結果 1. V_d' は標準 $(d-1)$-単体の n-切片（次元 $\leqq n$ の単体の作る部分複体）と同じホモトピー型をもち、標準写像 $\pi: V_d\to V_d/\mathfrak{S}_{n+1}=V_d'$ はホモロジー群の全射を導く。

証明. Brieskorn 型の超曲面の研究により

$$U_d=\{z\in V_d \mid z_i^d : \text{real} \geqq 0,\ i=0,1,\cdots,n\}$$

とおくと，U_d は V_d の変形レトラクトで

$$U_d \simeq \mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d \quad (d\text{-点の}(n+1)\text{-個の結})$$

であることがわかり，さらにその変形レトラクションを見ると

$$V_d/\mathfrak{S}_{n+1} \simeq U_d/\mathfrak{S}_{n+1} \cong \mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d/\mathfrak{S}_{n+1}$$
$$(\mathfrak{S}_{n+1} \text{の} \mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d \text{への作用は因子の置換})$$

がわかる。あとは純粋に組合わせ位相幾何的な考察で

$$\mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d \gtrsim (\Delta^{d-1})^n$$

を得る。同時に鎖複体の対応もわかり，ホモロジーに関する結果を得る。

$H_n(V_d)$ 上の Seifert 形式，交わり形式については次のことが知られている。

$$r = (r_0, \cdots, r_n), \quad 0 \leq r_i \leq d-2, \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

に対して，$l_r \in H_n(V_d)$ があって，$\{l_r\}$ は $H_n(V_d)$ の基底となる。この時，Seifert 形式，交わり形式は次のようになる。

$$\gamma(l_r, l_s) = \begin{cases} (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} & s_i \leq r_i \leq s_i + 1 \\ & (i = 0, 1, \cdots, n) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$S(l_r, l_s) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} & s_i \leqq r_i \leqq s_i+1 \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_i-1 \leqq r_i \leqq s_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

このことと，前の節の考察を合わせると次の結果を得る。

<u>結果 2.</u>　$H_n(V'_d)$の階数は$\binom{d-1}{n+1}$で

$$R = \{r_0, \cdots, r_n\} \qquad 0 \leq r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leqq d-2$$

なるRに対して$H_n(V'_d)$の元l'_Rが存在して$\{l'_R\}$は$H_n(V'_d)$の基底となる。この時 Seifert 形式，交わり形式は次のようである。

$$\gamma(l'_R, l'_S) = \begin{cases} (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} & s_i \leqq r_i \leqq s_i+1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$S(l'_R, l'_S) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} & s_i \leqq r_i \leqq s_i+1 \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_i-1 \leqq r_i \leqq s_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

II. GがD_{n+1}型の Weyl 群$W(D_{n+1})$とする。群$W(D_{n+1})$は $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ と $\varepsilon = (\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\sum \varepsilon_i \equiv 0 \pmod 2$

で生成され，その $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の作用は

$$\sigma\cdot(z_0,\cdots,z_n)=(z_{\sigma(0)},\cdots,z_{\sigma(n)})$$

$$\varepsilon\cdot(z_0,\cdots,z_n)=(\varepsilon_0 z_0,\cdots,\varepsilon_n z_n)$$

である。今 f として

$$f=z_0^{2d}+\cdots+z_n^{2d}$$

をとると $W(D_{n+1})$ で不変である。この時 f' は重みが $(2d;2,4,\cdots,2n,n+1)$ の重みつき斉次多項式で，その Milnor 数は $\binom{d-1}{n+1}+\binom{d}{n+1}=2\binom{d-1}{n+1}+\binom{d-1}{n}$ である。

結果 1．

$$V_{2d}/W(D_{n+1})\simeq(\Delta^{d-1})^n\underset{(\Delta^{d-1})^{n-1}}{\cup}(\Delta^{d-1})^n$$

（標準 $(d-1)$-単体の n-切片 2つを $(n-1)$-切片のところで貼合わせたもの）

$$H_n(V_{2d})\xrightarrow{\pi_*}H_n(V_{2d}/W(D_{n+1}))\ ;\ 全射.$$

結果 2．

$$\left\{R=\{r_0,r_1,\cdots,r_n\}\ \middle|\ \begin{array}{l} \text{i)}\ 0\leqq r_0<r_1<\cdots<r_n\leqq d-1 \\ \text{又は} \\ \text{ii)}\left\{\begin{array}{l}0\leqq r_n-d<r_0<r_1<\cdots<r_{n-1}\leqq d-2\\ r_{n-1}<r_n<r_0+d\end{array}\right.\end{array}\right\}$$

なる R に対して $H_n(V_{2d}/W(D_{n+1}))$ の元 ℓ''_R があって $\{\ell''_R\}$ は $H_n(V_{2d}/W(D_{n+1}))$ の基底。Seifert 形式，交わり形式は

$$\gamma(\ell''_R,\ \ell''_S) = \begin{cases} (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} & s_i \leqq r_i \leqq s_i+1 \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

$$S(\ell''_R,\ \ell''_S) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} & s_i \leqq r_i \leqq s_i+1 \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_i-1 \leqq r_i \leqq s_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

である。