数理解析研究所講究録
第 225 巻 1975 年 262-291

概均質ベクトル空間の特異軌道とb-関数

紋理 木村達雄 記

§1. 準備(定義,その他)

V=複素数体$\mathbb{C}$上の有限次元ベクトル空間($\dim V = n$とする)

$G(\subset GL(V))$=連結線型代数群　,とするとき

対(G, V)が概均質ベクトル空間(*Prehomogeneous vector space*, P.V.と略記する.)とは,Vの代数的真部分集合Sが存在してGが$V-S$に均質に作用していること,すなわち

$$V-S = G\cdot x \quad \text{for } x \in V \ .$$

このとき,Sを(G,V)の特異点集合(*singular set*)とよびSに含まれるG-軌道(*orbit*)を(G,V)の特異軌道(*singular orbit*)という。　以下では次の仮定をする。

仮定:Gは*reductive*で,Sは既約超曲面

(この仮定を満す例として,既約正則概均質ベクトル空間の族があり分類ができている。この仮定を弱めた場合もある程度できているが,そのときは多変数のb-関数$b_\chi(\omega)$の考察が必要になる。)

さて仮定から$S=\{x\in V \mid f(x)=0\}$なる既約多項式$f(x)$が存在するが,SがG-許容なことから　$f(x)$はV上の相対

不変多項式 (relative invariant) であり，逆に V 上の相対不変有理式は cf^m ($c\in\mathbb{C}^*$, $m\in\mathbb{Z}$) に限る事がわかる。

$$f(g\cdot x) = \chi(g) f(x) \quad \text{for } \forall g\in G,\ x\in V.$$

f に対応する指標 χ の微分を $\delta\chi$ とする。すなわち G のリー環を $\mathfrak{g}$ とするとき

$$\chi(\exp tA) = \exp t\,\delta\chi(A) \quad \text{for } \forall t\in\mathbb{C}^\times,\ A\in\mathfrak{g}.$$

然らば

$$(1.1) \qquad \delta\chi(A) = \frac{\deg f}{\dim V}\cdot \mathrm{tr}_V A \quad \text{for } \forall A\in\mathfrak{g}$$

が成り立つ。([ ],[ ]参照)

注) $f(x)$ は斉次多項式である。

V^* ($=V$ の dual space) には，群 G が contragredient に作用するが G が reductive であるから (G, V^*) も P.V. でかつその singular set S^* も既約超曲面である。

$S^* = \{y\in V^* \mid f^*(y) = 0\}$ とすれば

$f^*(g^*\cdot y) = \chi^{-1}(g) f^*(y)$ ($g\in G$, $y\in V^*$. g の V^* への作用を $g^*\cdot y$ と記す) が成り立つ.

$f^*(\mathrm{grad}_x) = f^*(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n})$ ($n=\dim V$) なる微分作用素を $f(x)^{s+1}$ に作用させると，それは V 上の character χ^s に対応する relative invariant になるから定数倍 (s に depend するので $b(s)$ と記す) を除いて f^s に一致する. すなわち

$$(1.2) \qquad f^*(\mathrm{grad}_x) f(x)^{s+1} = b(s) f(x)^s$$

を得る.

この（Sに関する）多項式を (G, V) の b-関数，または b-多項式という。　$\deg b(s) = \deg f(x)$ が成り立つ。

Singular orbits と $b(s)$ の関係を研究し，$b(s)$ を具体的に決定する方法を得るのが本論の目標である。

$$\mathcal{D} = V\text{上の}\overbrace{\text{hol. func. 係数の}}\ \text{differential operators のなす sheaf}$$
$$\mathcal{D}[s] = \{ P(s, x, D) = \sum_{j=0}^{m} P_j(x, D) s^j \mid P_j \in \mathcal{D} \}$$
$$\mathcal{J} = \{ P(x, D) \in \mathcal{D} \mid P(x, D) f^s = 0 \}$$
$$\mathcal{J}[s] = \{ P(s, x, D) \mid P(s, x, D) f^s = 0 \}$$ とおく．

f の b-多項式 $b(s)$ が $(s+\alpha)$ でわりきれる事を示すのには次の事がいえれば十分である．

すなわち V 上の超関数 $\Delta(x)$ があって

1) $P(-\alpha, x, D)\Delta(x) = 0$ for $\forall P(s, x, D) \in \mathcal{J}[s]$

2) $f(x)\Delta(x) = 0$

3) $\Delta(x) \neq 0$．

実際 (1.2) より $\{ f^*(\mathrm{grad}_x) f(x) - b(s) \} f(x)^s = 0$

すなわち $f^*(\mathrm{grad}_x) f(x) - b(s) \in \mathcal{J}[s]$

従って 1) より $\{ f^*(\mathrm{grad}_x) f(x) - b(-\alpha) \} \Delta(x) = 0$

従って 2) より $b(-\alpha)\Delta(x) = 0$．　$b(-\alpha)$ は定数ゆえ

3) より $b(-\alpha) = 0$　i.e. $(s+\alpha) \mid b(s)$　を得る．

ここで $\Delta(x)$ は 1), 2), 3) を満たせばよいわけで，実際には microfunction として扱う．

1) 2) 3) をみたす $\Delta(x)$ が存在するための条件をこれから調べていこう．

$f^s(gx) = \chi(g)^s f^s(x)$ において $g = \exp tA$ $(A \in \mathfrak{g})$ を代入して t で微分して $t=0$ とおけば

(1.3) $\quad \langle Ax, \mathrm{grad} \rangle f(x)^s = s\,\delta\chi(A)\, f(x)^s$ を得る．

($x = (x^1, \cdots, x^n)$ のとき $\langle Ax, \mathrm{grad}\rangle = \langle Ax, D\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ を意味する。但し $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(V)$)

従って $\langle Ax, D\rangle - s\,\delta\chi(A) \in \mathcal{J}[s]$ が成り立つから 1) が成り立てば

1′) $\{\langle Ax, D\rangle + \alpha\, \delta\chi(A)\}\Delta(x) = 0$ for $\forall A \in \mathfrak{g}$

が成り立つ．(i.e. 1) $\Rightarrow$ 1′))

ここで我々は次の二つの事を調べなくてはならない．

I) 如何なる条件のもとで 1) と 1′) が同値になるか？

II) 如何なる条件のもとで 1′) 2) 3) を満たす $\Delta(x)$ が存在するか？

その為にいくつかの概念を導入しよう．

$x_0 \in V$ に対し $V_{x_0} \overset{\mathrm{def}}{=} T_{x_0}V / T_{x_0}G{\cdot}x_0 = V/\mathfrak{g}{\cdot}x_0$ を x_0 における normal vector space という．

V_{x_0} には isotropy subgroup $G_{x_0} \overset{\mathrm{def}}{=} \{g \in G \mid g{\cdot}x_0 = x_0\}$ が

作用する. V^* を V の dual とするとき

$V_{x_0}^* \overset{\mathrm{def}}{=} \{ y \in V^* \mid \langle \mathfrak{g} \cdot x_0, y \rangle = 0 \}$ を x_0 における conormal vector space という. この空間にも G_{x_0} が(但し反傾的に)作用する.

$T_{G\cdot x_0}^* V \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{\{ (x, y) \in V \times V^* \mid x \in G\cdot x_0 , y \in V_x^* \}}$ を x_0 を通る orbit $G\cdot x_0$ の conormal bundle とよぶ. 但し $\overline{}$ は $V \times V^*$ における Zariski-closure を表わす.

容易にわかるように

☆ G が $T_{G\cdot x_0}^* V$ に概均質に作用する (i.e. Zariski-dense orbit が存在する)

同値 $\Updownarrow$

☆ $(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$ は P.V. である.

同値 $\Updownarrow$

☆ $T_{G\cdot x_0}^* V = \overline{G(x_0, y_0)}$ $({}^{\exists} y_0 \in V^*)$, が成り立つ.

さて (1.3) において $s=1$, $x \in V - S$ (i.e. $f(x) \neq 0$) とすれば

$$\langle Ax, \mathrm{grad} \log f(x) \rangle = \delta\chi(A) \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{g}$$

が成り立つが, (G, V) が概均質な事により $\mathfrak{g} \cdot x = V$ (${}^{\text{各}} x \in V - S$) 従って $\mathrm{grad} \log f(x) \in V^*$ と考えられる. すなわち

(1.4) $\quad V - S \xrightarrow{\mathrm{grad} \log f} V^*$ である.

今 $V \times V^*$ の中の $(n+1)$ 次元の alg. subset W を

$W \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{\{ (x, \varepsilon\, \mathrm{grad} \log f(x)) \mid x \in V - S , \varepsilon \in \mathbb{C}^\times \}} \subset V \times V^*$ と

定義する．　以上の定義のもとで　I), II) に対する解答は次のようになる．　$x_0 \in V$ に対し

I) i) G が $T^*_{G\cdot x_0}V$ に概均質に作用する (i.e. $T^*_{G\cdot x_0}V = \overline{G(x_0, y_0)}$ for $\exists y_0 \in V^*$)

ii) $T^*_{G\cdot x_0}V \subset W$

の二条件が満されれば (x_0, y_0) の近傍で（すなわち micro-local に考えて） 1) と 1') は同値になる．

II) $\dfrac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)}$ $(A \in \mathfrak{g}_{x_0})$ が $A \in \mathfrak{g}_{x_0} \overset{def}{=} \{A \in \mathfrak{g} \mid A\cdot x_0 = 0\}$ のとり方によらず一定ならば 1') 2) 3) をみたす $\Delta(x)$ が存在する．但し $\alpha = \dfrac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)}$ （$\delta\chi(A) \neq 0$ とする．）

$x_0 \in V$ に対し orbit $G\cdot x_0$ が i) ii) の条件を満すとき '<u>good orbit</u>' ということにする。

注） $x_0 \in V - S$ に対しては $\mathfrak{g}_{x_0}$ は ~~reductive~~ semi-simple になるから（仮定及び松島の定理！） $\delta\chi(A) = 0$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ である．よって $b(s)$ を調べるには singular orbit が重要である．

次の§で I), II) の証明をやり，§3で $x_0 \in S$ を与えたとき $G\cdot x_0$ が good orbit か否かを判定するための いくつかの定理を証明付きで述べ，§4で 実際の計算例（木村による）を示そう．

§2. 主定理の証明

前§のおわりに述べたことをまとめると

> **主定理.** (G, V) を G が reductive で Singular set S が既約超曲面である概均質ベクトル空間とする. $x_0 \in S$ について
>
> i) $(G_{x_0}, V^*_{x_0})$ は概均質ベクトル空間である.
>
> ii) $T_{G^*x_0}V \subset W$
>
> iii) $tr_{V_{x_0}} A$ と $\delta\chi(A)$ の比が $A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ のとり方によらず一定である. (但し $\delta\chi(A) \neq 0$ とする)
>
> の三条件が成り立てば $\left(s + \dfrac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)}\right) \Big| b(s)$ である.
>
> (M. Sato)

これを証明するには前§で述べたことにより P.6 の I), II) を証明すればよい.

まず I) を証明する.

$P(x, D) \in \mathcal{D}$ を $P(x, D) = P_m(x, D) + P_{m-1}(x, D) + \cdots + P_0(x, D)$,

$P_j(x, D) = \displaystyle\sum_{j_1 + \cdots + j_n = j} \alpha_{j_1 \cdots j_n}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j_n}$ と表わしたとき

$P_m(x, y)$ を $P(x, D)$ の principal symbol とよぶ.

($P_\sigma(x, y)$ と表わすことにする.)

$\mathfrak{g}_0 \overset{\text{def}}{=} \{A \in \mathfrak{g} \mid trA = 0\}$ とおき $V \times V^*$ の alg. subset $\widetilde{W}$, W' を次のように定義する.

$\widetilde{W} \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) \in V \times V^* \mid \langle Ax, y \rangle = 0 \text{ for } \forall A \in \mathfrak{g}_0\}$

$W' \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) \in V \times V^* \mid P_\sigma(x, y) = 0 \text{ for } \forall P \in \mathcal{J}\}$

そのとき

Lemma 1. $\widetilde{W} \supset W' \supset W$ が成り立つ.

$\because$) $\langle Ax, D \rangle \in \mathcal{J}$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_0$ ゆえ $\widetilde{W} \supset W'$ は明らか.

($\langle Ax, D \rangle$の principal symbol は $\langle Ax, y \rangle$ である.)

さて $P(x, D) \in \mathcal{J}$ とすれば

$P(x, D) f^s = s^m P_m(x, \operatorname{grad} f(x)) f^{s-m} + s^{m-1}(\ \text{''}\ ) + \cdots = 0$

s は parameter ゆえ s の多項式として恒等的に成り立つから

$P_m(x, \operatorname{grad} f(x)) = 0$ $x \in V - S$ とすれば $f(x) \neq 0$ ゆえ $\dfrac{\varepsilon^m}{f(x)^m}$ を

掛ければ $P_m(x, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x)) = 0$ i.e. $P_\sigma(x, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x)) = 0$

$\therefore$ $W' \supset \{(x, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x)) \mid x \in V - S\}$. 両辺の Zariski-closure をとって

$W' \supset W$ を得る. //

Lemma 2. 次の二つを仮定する.

i) $(G_{x_0}, V^*_{x_0})$ は P.V., すなわち その gen. pt. を y_0 とするとき

$$T^*_{G \cdot x_0} V = \overline{G(x_0, y_0)}$$

ii) $T^*_{G \cdot x_0} V \subset W = \overline{\{(x, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x)) \mid x \in V - S\}}$

このとき $(x_0, y_0) \in W' \subset \widetilde{W}$ の近傍で $\widetilde{W}$ と W' は一致する.

Proof)

Lemma 1 より (x_0, y_0) の近傍で W と $\widetilde{W}$ が一致することをいえばよい. ($(x_0, y_0) \in W$ をいうために仮定 ii) が必要なのである)

仮定 i) より $\dim \mathfrak{g} \cdot (x_0, y_0) = \dim \overline{G(x_0, y_0)} = n\ (= \dim V)$

(但し $A(x_0, y_0) = (Ax_0, {}^tAy_0)$ とする. $-{}^tAy_0$ とするべきだが $-y_0$ を考えれば同じ。$A \in \mathfrak{g}$) よって $\dim \mathfrak{g}_0 \cdot (x_0, y_0) \geqq n-1$, すなわち $\exists A_1, \cdots, A_{n-1} \in \mathfrak{g}_0$ s.t. $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A_1x_0 & \cdots & A_{n-1}x_0 \\ {}^tA_1y_0 & \cdots & {}^tA_{n-1}y_0 \end{pmatrix} = n-1$

従って $\widetilde{W}$ は (x_0, y_0) の近傍で $2n-(n-1) = n+1$ 次元以下. 他方 $W \subset \widetilde{W}$ で $\dim W = n+1$ かつ W は smooth ゆえ (x_0, y_0) の近傍で W と $\widetilde{W}$ は一致する. //

Lemma 3 $\mathcal{D} \supset \mathcal{J} \supset \widetilde{\mathcal{J}} = \mathcal{D}P_1 + \cdots + \mathcal{D}P_N$ とする. $\forall P \in \mathcal{J}$ に対し その principal symbol を P_σ とするとき, (x_0, y_0) の近傍で $P_\sigma(x, y) = \sum a_j(x, y) P_{j\sigma}(x, y)$ と表わせたとする. 但し $a_j(x, y)$ は (x_0, y_0) の近傍で定義された holomorphic function, $P_\sigma(x, y), P_{j\sigma}(x, y)$ は x に関して holomorphic で y に関して多項式とする. そのとき

$$\widetilde{\mathcal{J}}\Delta(x) = 0 \implies \mathcal{J}\Delta(x) = 0 \quad \text{である.}$$

略証)

$J, \widetilde{J}$ を $\mathcal{J}, \widetilde{\mathcal{J}}$ に対応する ideal (principal symbol の) とするとき $\mathcal{O} \otimes J = \mathcal{O} \otimes \widetilde{J} \Rightarrow \mathcal{P} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{J} = \mathcal{P} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \widetilde{\mathcal{J}}$ を示せばよい. ($\mathcal{O}$ は hol. func の sheaf, $\mathcal{P}$ は pseudo-differential operator の sheaf). $P = \sum_{k=-\infty}^{m} P_k(x, D) \in \mathcal{P} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{J}$ に対し $P_m(x, y) = R_m^1 P_{1\sigma} + \cdots + R_m^N P_{N\sigma}$ (但し R_m^i は $P_{i\sigma}$ の階数を l_i とするとき $m - l_i$ 階) ならば $P - R_m^1(x, D) P_1(x, D) - \cdots - R_m^N(x, D) P_N(x, D) = P'$ は $(m-1)$ 階, 以下くり返して $P = (\sum_{k=-\infty}^{m} R_k^1) P_1 + \cdots + (\sum_{k=-\infty}^{m} R_k^N) P_N$ を得る. これが Pseudo-diff. operator になっていることを示すには収束性の

check が必要だが略す. $P_i\Delta(x)=0\ (1\leq i\leq N)$ ならば
$P\Delta=(R^1P_1+\cdots+R^NP_N)\Delta=0$ を得る. //

Proposition 1. P.8 の Lemma 2 の仮定が成り立つとする.
microfunction $\Delta(x)$ が (x_0, y_0) の近傍で

$$(\langle Ax, D\rangle+\alpha\,\delta\chi(A))\Delta(x)=0 \quad \text{for } \forall A\in\mathfrak{g} \quad \text{ならば}$$

$$P(x,D,-\alpha)\Delta(x)=0 \qquad \text{for } \forall P(x,D,s)\in\mathcal{J}[S]$$

Proof)

$$\tilde{\mathcal{J}}=\{\langle Ax, D\rangle \mid A\in\mathfrak{g}_0\}$$ とおいて Lemma 2 と Lemma 3
を使えば, Prop 1 の仮定から $P(x,D)\Delta(x)=0$ for $\forall P(x,D)\in\mathcal{J}$
を得る. $A_0\in\mathfrak{g}$ で $\delta\chi(A_0)=1$ なるものをもってくる. (S が
超曲面という仮定から $\delta\chi\neq0$ がいえ, A_0 の存在が保証される.) 然らば

$$\begin{cases}\langle A_0x, D\rangle f^s=s\,\delta\chi(A_0)f^s=sf^s\\ \langle A_0x, D\rangle\Delta(x)=-\alpha\Delta(x)\end{cases}$$ を得る.

$$P(s,x,D)f^s=\sum P_j(x,D)s^jf^s=\sum P_j(x,D)\langle A_0x,D\rangle^jf^s=0$$

$$\therefore\ \sum_j P_j(x,D)\langle A_0x,D\rangle^j\in\mathcal{J} \qquad \therefore\ \sum_j P_j(x,D)\langle A_0x,D\rangle^j\Delta(x)$$

$$=P(-\alpha,x,D)\Delta(x)=0$$ //

注) (x_0,y_0) の近傍で考えるという事は micro-local に考えるということ
に他ならない. よって microfunction や pseudo-diff. op. の概念が必要で
あるが, 主定理そのものを述べるのには(表面上)これらの概念はでてこない.

次に II) の部分 (P.6) を証明しよう.

Lemma 4. G の homogeneous space $M = G/G_{x_0}$ ($x_0 \in M$) に G-相対不変な volume element ω が存在する : $\omega(gx) = \chi(g)\omega(x)$

$\Updownarrow$

G_{x_0} の $T_{x_0}M$ における表現の determinant が G のある character χ の G_{x_0} への制限になっている : $\det_{T_{x_0}M} g = \chi(g)$ for $\forall g \in G_{x_0}$

(i.e. リー環でいえば $\mathfrak{g}_{x_0}$ の $T_{x_0}M$ における表現の trace が $\mathfrak{g}$ の character $\delta\chi$ の $\mathfrak{g}_{x_0}$ への制限になっている.)

Proof)

$\Downarrow$) $\omega(gx) = \chi(g)\omega(x)$ となる M の volume element $\omega(x)$ が存在したとし, $x_0 \in M$ の近傍で局所座標により $\omega(x) = \rho(x)\underbrace{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}_{dx}$ と表わせたとする. $g \in G_{x_0}$ は x_0 を fix するから

$\omega(gx) = \rho(gx)d(gx)$ と表わせる. $gx = (\varphi^1(x), \cdots, \varphi^n(x))$ とすると

$d(gx) = \det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x_j}(x)\right)dx$, $gx_0 = x_0$ ゆえ

$\chi(g)\rho(x_0)dx\Big|_{x_0} = \omega(gx)\Big|_{x_0} = \rho(x_0)\cdot\det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x_j}(x_0)\right)dx\Big|_{x_0}$

$\therefore \chi(g) = \det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x_j}(x_0)\right)$ for $g \in G_{x_0}$, $\det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x_j}(x_0)\right) = \det_{T_{x_0}M} g$ より

$\chi|_{G_{x_0}} = \det_{T_{x_0}M}$ を得る.

$\Uparrow$) $\begin{matrix} M & \xrightarrow{g^{-1}} & M \\ \Psi & & \Psi \\ x = gx_0 & \longmapsto & x_0 \end{matrix}$ は $T_xM \xrightarrow{J_{g^{-1}}} T_{x_0}M$ を induce するが

これはまた更に $T^*_{x_0}M \xrightarrow{J^*_{g^{-1}}} T^*_{gx_0}M$ を与える.

$x_0 \in M$ における n-form を ω_0 とする: $\omega_0 \in \bigwedge^n T^*_{x_0}M$

そのとき
$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^n T^*_{x_0}M & \xrightarrow{(\delta g^{*}_{-1})^{n}} & \bigwedge^n T^*_{gx_0}M \\ \Psi & & \Psi \\ \omega_0 & \longmapsto & (\delta g^{-1})\,\omega_0 \end{array}$$
が得られる.

これで M 上の n-form が一応つくれたが $gx_0 = g'x_0$ であっても $g \neq g'$ の可能性がある. そのとき $(\delta g^{-1})\omega_0 \neq (\delta g'^{-1})\omega_0$ となっては不都合.

しかしながら G のある character χ があって $\chi|_{G_{x_0}} = \det_{T_{x_0}M}$ となっているならば, $\chi(g)(\delta g^{-1})\omega_0 = \chi(g')(\delta g'^{-1})\omega_0$ if $gx_0 = g'x_0$ がいえる. 実際 $x = gx_0 = g'x_0$ とすれば $g' = gg_1$, $g_1 \in G_{x_0}$ とおけるから $\chi(g_1)(\delta g_1^{-1})\omega_0 = \omega_0$ for $\forall g_1 \in G_{x_0}$ を示せばよい.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi = g_1^{-1}} & M \\ \Psi & & \Psi \\ x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array} \quad (g_1 \in G_{x_0}) \text{ とすれば } \begin{array}{ccc} T_{x_0}M & \xrightarrow{(d\varphi)_{x_0} = \delta g_1^{-1}} & T_{x_0}M \\ \Psi & & \Psi \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0} & \longmapsto & \sum \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{x_0} \end{array} \text{ ゆえ}$$

$$\begin{array}{ccc} T^*_{x_0}M & \xrightarrow{(d\varphi)^*_{x_0}} & T^*_{x_0}M \\ \Psi & & \Psi \\ dx_i & \longmapsto & \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x_0)\,dx_j \end{array}$$
を得る. $\det\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0)\right) = (\det_M g_1)^{-1}$ に注意すれば $(\delta g_1^{-1})\omega_0 = (\det_M g_1)^{-1}\omega_0$ となるから $\chi(g_1)\delta(g_1^{-1})\omega_0 = \omega_0$. ここで得られた n-form ω が G-相対不変である: $\omega(gx) = \chi(g)\,\omega(x)$ //

Lem 4 の例.

余談) 例えば $G = SL(2, \mathbb{R})$ が $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ に $x \xmapsto{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \dfrac{ax+b}{cx+d}$ と作用する場合を考える. このとき G-相対不変な volume element は存在しない.

実際 $\omega(x) = \rho(x)\,dx$ が $\omega(gx) = \chi(g)\omega(x)$ となれば $g = \begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix}$ を考えることにより $\rho(x) = e^{ax+b}$ の形. 他方 $\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ を考えると $e^{-\frac{a}{x}+b}\frac{dx}{x^2} = \chi\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} e^{ax+b}\,dx$ 矛盾.

そして $\mathrm{tr}_{T_{x_0}M} A = 2a$ for $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{x_0}$ ($x_0 = 0$ 原点), しかるに $\underset{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}{\overset{\parallel}{\mathfrak{g}}}$ の character $\delta\chi \equiv 0$.

Lemma 5. $x_0 \in V$ を通る G-orbit $G\cdot x_0$ の上に G-相対不変な volume element ω ($\omega(gx) = \chi(g)\omega(x)$) が存在すれば V 上の $G\cdot x_0$ に support をもつ超関数 $\Delta(x)$ で G-相対不変なものが存在する. ($\Delta(gx) = \dfrac{\chi(g)}{\det_V g}\Delta(x)$)

Proof)

distribution の言葉で説明する. f' を $V_{\mathbb{R}}$ ($V = \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$) 上の compact supported C^∞-function とするとき

$$f' \longmapsto \int_{G\cdot x_0} f'|_{G\cdot x_0}\,\omega = \int_V f(x)\Delta(x)\,dx_1\cdots dx_n$$ は $G\cdot x_0$ に

support をもつ distribution $\Delta(x)$ を定義する. (これは algebraic hyperfunction である.) これが G-相対不変なことを示そう.

$f'_g(x) = f'(gx)$ とおくと

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int_{G\cdot x_0} f'(x_1)\omega(x_1) & = & \displaystyle\int f'(x)\Delta(x)\,dx \\
\| & & \| \\
\displaystyle\int_{G\cdot x_0} f'_g(x_1)\omega(gx_1) & & \displaystyle\int f'_g(x)\Delta(gx)\,d(gx) \\
\| & & \| \\
\displaystyle\chi(g)\int_{G\cdot x_0} f'_g(x_1)\omega(x_1) & & \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{(\det_V g)\displaystyle\int f'_g(x)\Delta(gx)\,dx} \\
\| & & \\
\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\chi(g)\displaystyle\int f'_g(x)\Delta(x)\,dx} & &
\end{array}$$

従って $\Delta(gx) = \dfrac{\chi(g)}{\det_V g}\Delta(x)$ を得る. //

Proposition 2. $x_0 \in V$ における isotropy subalgebra $\mathfrak{g}_{x_0}$ の元 A のとり方によらず $\mathrm{tr}_{V_{x_0}} A$ と $\delta\chi(A)$ の比が一定であると

仮定する: $tr_{V_{x_0}} A = \alpha\, \delta\chi(A)$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ (このとき $\alpha \in \mathbb{Q}$ となる) そのとき $G\cdot x_0$ に support をもつ (i.e. $f\Delta = 0$ if $x \in S$) V 上の超関数 $\Delta(x)$ で $\{\langle Ax, grad\rangle + \alpha\,\delta\chi(A)\}\Delta(x) = 0$ for $\forall A \in \mathfrak{g}$ となるものがある.

Proof) $tr_{V_{x_0}} = tr_V - tr_{\mathfrak{g}\cdot x_0}$ ($\mathfrak{g}\cdot x_0 = T_{x_0}G\cdot x_0$) であるから仮定より $tr_{\mathfrak{g}_{x_0}} A = tr_V A - \alpha\,\delta\chi(A)$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ を得る.
群の言葉でいえば $\det_{T_{x_0}G\cdot x_0} g = (\det_V g)\cdot\chi(g)^{-\alpha}$ である. (すべて G の universal covering group, $G\cdot x_0$ の covering space で考える)
よって Lemma 4 により $G\cdot x_0$ 上に $\omega(gx) = (\det_V g)\cdot\chi(g)^{-\alpha}\omega(x)$ なる volume element が存在する. 従って Lemma 5 により
$\Delta(gx) = \dfrac{(\det_V g)\chi(g)^{-\alpha}}{\det_V g}\Delta(x) = \chi(g)^{-\alpha}\Delta(x)$ なる超関数 $\Delta(x)$ がある.
この式を t (但し $g = \exp tA$, $A \in \mathfrak{g}$) に関して微分して $t=0$ とおくと $\langle Ax, grad\rangle\Delta(x) = -\alpha\,\delta\chi(A)\Delta(x)$ を得る. //

以上で II) が証明され, 結局 主定理 (P.7) の証明が完了した. 主定理の条件のうち i) と iii) は具体的に計算可能な量である. 特に iii) の比が一定ということは

$$\frac{tr_{ad\,\mathfrak{g}_{x_0}} A}{tr_V A} = \left(\frac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)}\right)\frac{\deg f}{\dim V} - 1$$

が一定という事と同じで, これは $\mathfrak{g}_{x_0}$ を求めれば計算できる. しかし ii) はそのまゝでは わからない.

よって ii) が成り立つための条件を 次の § で 調べよう.

§3. Singular orbit の conormal bundle が W に含まれる為の条件

$x_0 \in S$ をとり $x = x_0 + \varepsilon x'$ とおくとき
$f(x) = \varepsilon^k f_{x_0}(x') + \varepsilon^{k+1}(*\ )$, $f_{x_0}(x') \not\equiv 0$ によって $f(x)$ の $x_0 \in V$ における localization $f_{x_0}(x')$ を定義する. x' が勝手に動くとき x もそうであるから このような f_{x_0} は必ず存在する.

このとき f_{x_0} が k 次の斉次多項式であることは容易にわかる。

Lemma 1. 相対不変式 $f(x)$ の character を χ とするとき, f の $x_0 \in V$ における localization f_{x_0} は G_{x_0} の作用に関して character χ に対応する相対不変式で, しかも $f_{x_0}(x') = f_{x_0}(x'')$ if $x' \equiv x''$ mod $\mathfrak{g}\cdot x_0$ が成り立つ. よって f_{x_0} は (G_{x_0}, V_{x_0}) の相対不変式である.

Proof) $g \in G_{x_0}$, $x = x_0 + \varepsilon x'$ とすると, $g\cdot x = x_0 + \varepsilon g x'$ ゆえ

$$f(gx) = \varepsilon^k f_{x_0}(gx') + \varepsilon^{k+1}(\ \text{〃}\ )$$

$$\overset{\shortparallel}{\chi(g) f(x)} = \varepsilon^k \chi(g) f_{x_0}(x') + \varepsilon^{k+1}(*\ )$$ 両辺を ε^k で

わって $\varepsilon \to 0$ とすれば $f_{x_0}(gx') = \chi(g) f_{x_0}(x')$ を得る.

$\forall A \in \mathfrak{g}$ にたいし $\exp \varepsilon A \in G$ ゆえ

$$f(\exp \varepsilon A \cdot (x_0 + \varepsilon x')) = \exp \varepsilon\, \delta\chi(A) \cdot f(x_0 + \varepsilon x')$$

そして $\exp \varepsilon A \cdot (x_0 + \varepsilon x') = x_0 + \varepsilon\{(x' + Ax_0) + \varepsilon(*\ )\}$ ゆえ

両辺を展開すれば　$\varepsilon^k f_{x_0}(x'+Ax_0)+\varepsilon^{k+1}(\ast)=\varepsilon^k f_{x_0}(x')+\varepsilon^{k+1}(\ast)$

よって両辺を ε^k でわって $\varepsilon\mapsto 0$ とすれば

$$f_{x_0}(x'+Ax_0)=f_{x_0}(x')\quad (A\in\mathfrak{g}) \qquad //$$

Lemma 1 の Cor.　(G_{x_0}, V_{x_0}) が P.V. ならば, character χ に対応する相対不変多項式が定数倍を除いて唯1つ存在する.

∵) 概均質ベクトル空間の相対不変式は character で定まることより.

※ ここで大切な事は, もとの相対不変式の具体的な形を知らなくても, localization の具体的な形がこの Cor. からわかる場合が多いことである.

Lemma 2.　(G, V) を勝手な(何も仮定しない)概均質ベクトル空間とする. S をその singular set, f を相対不変式の一つとする. そのとき $V-S \xrightarrow{\text{grad}\log f} V^*$ (P.5 参照)が generically surjective (i.e. image の Zariski-closure が全体と一致)であることと $H_{\log f}$ (= Hessian of $\log f$) $\neq 0$ とは同値. $\deg f \geqq 2$ なら H_f (= Hessian of f) $\neq 0$ と同値.

Proof)　$\varphi(x)=\text{grad}\log f(x)=(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))\in V^*$ とおくと $\varphi_i(x)=\frac{\partial}{\partial x_i}\log f=\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n)$ である. f が相対不変式であることより $\exists x\in V-S$ s.t. $\det(d\varphi)_x\neq 0$ ならば $\forall x\in V-S$ につい

てもそうなる．（∵ $\det(d\varphi)_{gx} = (\det_V g)^{-2}\cdot\det(d\varphi)_x$ ）

$\det(d\varphi)_x = \det\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x)\right) = \det\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\log f\right) =$ Hess. of $\log f$ ゆえ

前半は証明された． $r = \deg f > 1$ とすると

$$\det(d\varphi)_x = \det\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x)\right) = \det\left(\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x) - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

$$= \left|\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}, & \cdots\cdots, & \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_1}, & \cdots\cdots, & \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n} - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \hline 0, & \cdots, & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}, & \cdots\cdots, & \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}, & \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}, & \cdots\cdots, & \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}, & \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1}, & \cdots\cdots, & \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_n}, & 1 \end{vmatrix} \quad *$$

ところで Euler の恒等式により $\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i} = (r-1)\frac{\partial f}{\partial x_i}$,

$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f = rf$ ゆえ

$$x_1\begin{bmatrix} \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} \\ \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n} \\ \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r-1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{r-1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ r \end{bmatrix}$$

従って

$$* = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right)\cdot\frac{1}{f(x)^n}\left(1 - \frac{r}{r-1}\right)$$

$$\therefore\ \det(d\varphi)_x = \frac{-1}{r-1}\cdot\frac{H_f(x)}{f(x)^n} \qquad \therefore\ \det(d\varphi)_x \neq 0 \leftrightarrow H_f(x) \neq 0$$

//

※ $\deg f = 1$ のときは $\det(d\varphi)_x \neq 0 \longleftrightarrow \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \neq 0$

Proposition 1. $x_0 \in V$ に対し (G_{x_0}, V_{x_0}) が P.V. で $\dim V_{x_0} = 1$ であるか、または $\dim V_{x_0} \geqq 2$ で localization f_{x_0} の Hessian $\neq 0$ ならば $T^*_{G x_0}V \subset W \overset{\text{def}}{=} \overline{\{(x, \varepsilon\, \mathrm{grad} \log f(x)) \mid x \in V - S\}}$

Proof)

$x = x_0 + \varepsilon x' \in V - S$ とする。 $\mathrm{grad}_x \log f(x) = \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}_{x'} \log f(x_0 + \varepsilon x')$

$= \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}_{x'} \log \varepsilon^k f_{x_0}(x')\{1 + \sum_{j\geq 1}\varepsilon^j h_j(x')\}$

$= \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}_{x'} \log f_{x_0}(x') + \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}_{x'} \log\{1 + \varepsilon\sum_{j\geq 1}\varepsilon^{j-1}h_j(x')\}$

従って

$W \ni (x, \varepsilon\,\mathrm{grad}\log f(x)) = (x_0 + \varepsilon x', \mathrm{grad}_{x'}\log f_{x_0}(x') + \mathrm{grad}_{x'}\log\{1+\varepsilon(*)\})$

ここで $\varepsilon \mapsto 0$ とすれば、W は closed ゆえ $(x_0, \mathrm{grad}_{x'}\log f_{x_0}(x')) \in W$ を得る。さて (G_{x_0}, V_{x_0}) の singular set を S_{x_0} とするとき $x' \in V_{x_0} - S_{x_0}$ なら $f_{x_0}(x') \neq 0$ ゆえ $f(x_0 + \varepsilon x') \neq 0$ (ﾞ $\varepsilon \neq 0$)。S は超曲面であったから $x_0 + \varepsilon x' \in V - S$ がいえ、今のことより $\forall x' \in V_{x_0} - S_{x_0}$ に対して $(x_0, \mathrm{grad}_{x'}\log f_{x_0}(x')) \in W$ を得る。仮定と Lemma 2 より

$V_{x_0} - S_{x_0} \xrightarrow{\mathrm{grad}\log f_{x_0}} V^*_{x_0}$ は generically surjective ゆえ

$(x_0, V^*_{x_0}) \subset W$. $(gx, g^*\varepsilon\,\mathrm{grad}\log f(x)) = (gx, \varepsilon\,\mathrm{grad}\log f(gx))$

ゆえ $(x, y) \in W$ なら $g(x, y) = (gx, g^*y) \in W$ がいえる。 従って

$(gx_0, g^*V^*_{x_0}) = (gx_0, V^*_{gx_0}) \subset W$ $\therefore T^*_{G x_0}V \subset W$ //

注) $\dim V_{x_0} \geqq 2$ かつ $\deg f_{x_0} = 1$ なる $\mathrm{grad}\log f_{x_0}$ は gen. surj. にはならない。更に

$(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$ が P.V. になっていることもいえる．すなわち localization の Hessian が消えなければ good-orbit である．

Corollary： $x_0 \in V$ に対し (G_{x_0}, V_{x_0}) が既約正則概均質ベクトル空間なら $G \cdot x_0$ は good orbit である．

∵) 既約正則 P.V. の任意の相対不変多項式はその Hessian $\neq 0$ より //

☆ $G_{x_0} \hookrightarrow GL(V_{x_0})$ の image $\overline{G_{x_0}}$ が reductive で singular set S_{x_0} が既約超曲面ならば good orbit であることがわかる．

$x_0 \in V$ における localization の Hessian $\neq 0$ なら good-orbit であることがわかったが，次に Hessian $= 0$ になっている場合の判定法を考えよう．

G が reductive と仮定しているから，G の V への作用と，その V^* への反傾的な作用は互いに G の自己同型（内部とは限らぬ）でうつりあえる．すなわち $(G, V) \cong (G, V^*)$ as P.V. である．（すなわち (G, V) と (G, V^*) は同じものと考えることができる）

さて $x_0 \in V$ に対し $(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$ が P.V. であると仮定するとその generic pt y_0 があるが，$G^* \cdot y_0$ を V^* の orbit と考えて（$V = (V^*)^*$ と考える）conormal bundle $T_{G^* \cdot y_0}^* V^*$ $(\subset V \times V^*)$ を作ったとき，$T_{G \cdot x_0}^* V = T_{G^* \cdot y_0}^* V^*$ となることをまず示そう。

定義から $T^*_{G^*y_0}V^* = \{(x,y)\in V\times V^* \mid y\in G^*y_0,\ \langle x, \mathfrak{g}^* y\rangle = 0\}$

で $\langle x_0, \mathfrak{g}^* y_0\rangle = \langle \mathfrak{g} x_0, y_0\rangle = 0$ より $(x_0, y_0)\in T^*_{G^*y_0}V^*$.

conormal bundle は G 不変だから $T^*_{G\cdot x_0}V = \overline{G(x_0,y_0)} \subset T^*_{G^*y_0}V^*$

$\dim G(x_0,y_0) = n$ ゆえ V^* の方からみて conormal vector space $(G_{y_0}, V^*_{y_0})$

は P.V. で $x_0\in (V^*_{y_0})^* \subset V$ が gen. pt. i.e. $T^*_{G^*\cdot y_0}V^* = \overline{G(x_0,y_0)}$

よって $T^*_{G\cdot x_0}V = \overline{G(x_0,y_0)} = T^*_{G^*\cdot y_0}V^*$ を得る.

このことから V の orbit $G\cdot x_0$ と V^* の orbit $G^*\cdot y_0$ が対応する事がわかる。(G,V) と (G,V^*) を同一視すれば $G^*\cdot y_0$ は V のある orbit $G\cdot x_0'$ と同一視できる。このとき $G\cdot x_0$ と $G\cdot x_0'$ は互いに conormal bundle で対応する orbits という.

> **Proposition 2.** $G\cdot x_0$ と $G\cdot x_0'$ を conormal bundle で対応する orbits とすれば
>
> $$T^*_{G\cdot x_0}V \subset W \iff T^*_{G\cdot x_0'}V \subset W$$

Proof) 上に述べた議論から $W\subset V\times V^*$ が V と V^* に関して対称になっている事を示せば十分.

Lemma 3.

$W = \overline{\{(x,y)\in V\times V^* \mid x\in V-S,\ y\in V^*-S^*,\ \langle \mathfrak{g}_0 x, y\rangle = \langle x, \mathfrak{g}_0^* y\rangle = 0\}}$

($\overline{}$ は Zariski-closure in $V\times V^*$)

Proof) $\subset$ の証明. (G,V) は正則ゆえ $\operatorname{grad}\log f(x)\in V^*-S^*$

$(x\in V-S)$ よって $\forall\varepsilon$ に対して $\varepsilon \operatorname{grad}\log f(x)\in V^*-S^*$, そして

(1.3) より $\langle Ax, \varepsilon \operatorname{grad}\log f(x)\rangle = 0$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \{A \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{tr}\, A = 0\}$

⊃ の証明：

$x \in V - S$, $y \in V^* - S^*$, $\langle \mathfrak{g}_0 x, y\rangle = 0$ とする.

$y_1 = \operatorname{grad}\log f(x)$ とおくと $\langle Ax, y_1\rangle = \delta\chi(A) = 0$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_0$ ゆえ

もし $\langle x, y_1\rangle = 0$ とすると $\langle \mathfrak{g}x, y_1\rangle = \langle V, y_1\rangle = 0$ より $y_1 = 0$

他方 $y_1 \in V^* - S^*$ ゆえ矛盾. よって $\langle x, y_1\rangle \neq 0$. $\varepsilon = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle x, y_1\rangle}$ と

おくと $\langle \mathfrak{g}\cdot x, y - \varepsilon y_1\rangle = \langle V, y - \varepsilon y_1\rangle = 0$

$$\therefore\ y = \varepsilon y_1 = \varepsilon \operatorname{grad}\log f(x) \qquad //$$

このことから Prop 2 が証明された.

多くの場合 Prop 1 と Prop 2 によって conormal bundle が W に含まれることが証明できるが, Prop 1 と Prop 2 の条件がともに成り立たない場合, すなわち conormal bundle で対応する orbits の localization の Hessian が両方とも消えてしまう場合でも, conormal bundle が W に含まれる事を証明できるときがある.

$x_0 \in S$ における localization が x_n^k という形をしている場合を考えよう. すなわち $f(x_0 + \varepsilon x) = \varepsilon^k \cdot c\, x_n^k + \varepsilon^{k+1} f_{x_0}^{(1)}(x) + \cdots + \varepsilon^{\deg f} f(x)$.

$\dim V_{x_0} \geqq 2$ とすれば, 明らかに $\mathrm{Hess}\, f_{x_0} = 0$ である.

ここで $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$ なる形のものに制限して考えても $f(x_0 + \varepsilon x') \not\equiv 0$ である. 実際 $\{x \in V \mid f(x) = 0\} \cap \{x \in V \mid x_n = \text{[illegible]}\} \neq \phi$

(G reductive, S 既約超曲面, $\dim V \geqq 2$ という仮定から $\mathrm{Hess}\, f \neq 0$, 特に $\deg f \geqq 2$, f 既約 がいえるから)

$V^{(1)} = \{ x \in V \mid (x - x_0)_n = 0 \}$ または その V_{x_0} への image を $V_{x_0}^{(1)}$ と記す事にすると $(G_{x_0}, V_{x_0}^{(1)})$ には character χ に対応する相対不変式が存在する. 特に $(G_{x_0}, V_{x_0}^{(1)})$ が概均質ならば, それは定数倍を除いて unique である。それは明らかに $(k+1)$ 次以上であるが, 特に $(k+1)$ 次になっている場合を考えよう。 すなわち

$f(x_0 + \varepsilon x') = \varepsilon^{k+1} f_{x_0}^{(1)}(x') + \varepsilon^{k+2}(\cdots)$, $f_{x_0}^{(1)}(x') \neq 0$, $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$

そこで $x = (x', x_n)$ とおき $f_{x_0}^{(1)}(x) = f_{x_0}^{(1)}(x', x_n)$ を x_n に関して Taylor 展開すると

$f_{x_0}^{(1)}(x) = f_{x_0}^{(1)}(x', 0) + f_{x_0}^{(1)\prime}(x', 0) \cdot \frac{x_n}{1!} + \cdots$ となる。但し $'$ は x_n による微分を表わす。 よって $x = (x', x_n)$ とするとき

$$\mathrm{grad}_x\, f_{x_0}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}_{x'} f_{x_0}^{(1)}(x', x_n) \\ \hline \frac{\partial}{\partial x_n} f_{x_0}^{(1)}(x', x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}_{x'} f_{x_0}^{(1)}(x', 0) + x_n(\ast) \\ \hline f_{x_0}^{(1)\prime}(x', 0) + x_n(\ast\ast) \end{pmatrix}$$

となる.

一般に $x \in V - S$ に対し $\varphi(x) = \mathrm{grad} \log f(x)$ $\left(= \frac{\mathrm{grad}\, f(x)}{f(x)} \right)$ とおけば $\forall \varepsilon > 0$ に対して $(x, \varepsilon\varphi(x)) \in W$ となる事に注意しよう.

$$\mathrm{grad}\, f(x_0 + \varepsilon x) = \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{grad}_x\, f(x_0 + \varepsilon x)$$

$$= \varepsilon^{k-1} \cdot c_k \cdot x_n^{k-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon^k \begin{pmatrix} \mathrm{grad}_{x'} f_{x_0}^{(1)}(x', 0) + x_n(\ast) \\ \hline f_{x_0}^{(1)\prime}(x', 0) + x_n(\ast\ast) \end{pmatrix} + \varepsilon^{k+1}(\ast\ast\ast)$$

従って

$$\varepsilon\varphi(x_0+\varepsilon x)=\frac{\varepsilon^{k}\cdot c\cdot k\cdot x_n^{k-1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\varepsilon^{k+1}\begin{pmatrix}\mathrm{grad}_{x'}f_{x_0}(x',0)+x_n(*)\\ f_{x_0}^{(1)\prime}(x',0)+x_n(**)\end{pmatrix}+\varepsilon^{k+2}(***)}{\varepsilon^{k}\cdot c\cdot x_n^{k}+\varepsilon^{k+1}f_{x_0}^{(1)}(x)+\varepsilon^{k+2}(\cdots)}$$

特に $x=\begin{pmatrix}x'\\ \varepsilon^{\frac{1}{k-1}}x_n\end{pmatrix}$ $(k\geqq 2)$ とおくと

$$\varepsilon\varphi\left(x_0+\varepsilon\begin{pmatrix}x'\\ \varepsilon^{\frac{1}{k-1}}x_n\end{pmatrix}\right)=\frac{\begin{pmatrix}\mathrm{grad}_{x'}f_{x_0}^{(1)}(x',0)+\varepsilon(*)\\ c\cdot k\cdot x_n^{k-1}+f_{x_0}^{(1)}(x',0)+\varepsilon(*)\end{pmatrix}}{f_{x_0}^{(1)}(x',0)+\varepsilon^{\frac{1}{k-1}}(*\ \varepsilon\text{の負巾の項なし})}\quad\text{ゆえ}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\varphi\left(x_0+\varepsilon\begin{pmatrix}x'\\ \varepsilon^{\frac{1}{k-1}}x_n\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\mathrm{grad}_{x'}\log f_{x_0}^{(1)}(x',0)\\ x_n^{k-1}\cdot c\cdot k\cdot\dfrac{1}{f_{x_0}^{(1)}(x',0)}\end{pmatrix}\quad(k\geqq 2)$$

すなわち

$$\left(x_0,\ \begin{pmatrix}\mathrm{grad}_{x'}\log f_{x_0}^{(1)}(x',0)\\ x_n^{k-1}\cdot c\cdot k\cdot\dfrac{1}{f_{x_0}^{(1)}(x',0)}\end{pmatrix}\right)\in W\quad(\because W\ \text{closed})$$

ここで x_n は任意にとれる(但し $k\geqq 2$ と仮定)から $\mathrm{grad}_{x'}\log f_{x_0}^{(1)}(x',0)$ が generically surjective なる (i.e. $(G_{x_0},V_{x_0}^{(1)})$ の χ に対応する相対不変式が $(k+1)$ 次でかつ Hessian $\neq 0$) $(x_0,\ V_{x_0}^{*})\subset W$, $\therefore\ \overline{TG_{x_0}^{*}V}\subset W$ がいえる。 以上をまとめて

Proposition 3. $x_0\in V$ における localization f_{x_0} が x_n^{k} $(k\geqq 2)$ の形で, $V_{x_0}^{(1)}=\{x\in V_{x_0}\mid x_n=0\}$ とおくとき $(G_{x_0},V_{x_0}^{(1)})$ が概均質で, χ に対応する相対不変式の次数が $(k+1)$ 次, かつその Hessian $\neq 0$ とする. そのとき $\overline{TG_{x_0}^{*}V}\subset W$ である.

§4. GL(7) の3次 skew-tensor 表現 (GL(7), 目) の b-関数

以上の理論を実際の空間に適用して b-関数を計算してみよう。既約正則な P.V. $GL_{目}(7)$ を例にとろう。

$GL_{\square}(7)$ の base を $u_1, \cdots, u_7$ とするとき (GL(7), 目) は $u_i \wedge u_j \wedge u_k$ $(1 \leq i < j < k \leq 7)$ を base とする 35 次元の空間である。

Orbits は全部で 10ヶある。([ ] 参照) その代表点と次元を列挙すると

I) 0 (0次元), II) $u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$ (13次元), III) $u_1 \wedge (u_2 \wedge u_4 + u_3 \wedge u_5)$ (20次元) IV) $u_1 \wedge (u_2 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_6 + u_4 \wedge u_7)$ (21次元)

V) $u_1 \wedge u_2 \wedge u_6 + u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 + u_3 \wedge u_1 \wedge u_5$ (25次元)

VI) $u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 + u_4 \wedge u_5 \wedge u_6$ (26次元)

VII) $u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 + u_1 \wedge (u_2 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_6 + u_4 \wedge u_7)$ (28次元)

VIII) $u_1 \wedge u_3 \wedge u_4 + u_2 \wedge u_5 \wedge u_6 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_7$ (31次元)

IX) $u_2 \wedge u_3 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_4 \wedge u_6 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_7 - u_1 \wedge u_4 \wedge u_5$ (34次元)

X) $u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 + u_5 \wedge u_6 \wedge u_7 + u_1 \wedge (u_2 \wedge u_5 + u_3 \wedge u_6 + u_4 \wedge u_7)$ (35次元)

ここで I)〜IX) が singular orbits である。

代表点は isotropy subalgebra $\mathfrak{g}_{x_0}$ が標準形になるようにとってある。相対不変式は7次式である。([ ],[ ] 参照)

各々の orbits を調べてみよう。

I) 0次元

ここでは $G_{x_0}=G$, $V_{x_0}=V$, $V^*_{x_0}=V^*$ ゆえ P.19 の Cor. より good orbit である事がわかる。

(1.1)より $\dfrac{tr_{V_{x_0}}A}{\delta\chi(A)} = \dfrac{tr_V A}{\delta\chi(A)} = \dfrac{\dim V}{\deg f}$ 従って このorbitからは $b(s)$の因子 $\left(s+\frac{\dim V}{\deg f}\right) = \left(s+\frac{35}{7}\right) = (s+5)$ が得られる.

注) 既約正則概均質ベクトル空間に対しては原点と $\left(s+\frac{\dim V}{\deg f}\right)$ が常に対応する.

(G, V^*)の generic pt. は V の gen. pt. でもあるから conormal bundle による対応 (P.20) は I) ⟷ X) である.

II) 13次元

$$G_{x_0} \sim (SL(3)\times GL(4))\cdot(G_a)^{12}$$ であり

(G_{x_0}, V_{x_0}) は V_{x_0} の base $\omega_1,\dots,\omega_{22}$ を適当にとれば

$$(\omega_1,\dots,\omega_{22})\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}SL(3)\times GL(4)\\ \square\otimes日\end{matrix} & * \\ \hline 0 & \begin{matrix}GL(4)\\ 日\end{matrix}\end{array}\right)\begin{array}{l}\}\,18\\ \}\,4\end{array}$$ となる.

$\dfrac{tr_{V_{x_0}}A}{\delta\chi(A)} = 4$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ ゆえ $(s+4)$ と対応する. good orbit になることは conormal bundle で II) ⟷ IX) と対応すること (これは IX)の方から調べると容易) 及び §3 の Prop 1 (IX)の codim $=1$) と Prop 2 より得られる. $\deg f_{x_0} = 5$ である.

III) 20次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1) \times Sp(2) \times GL(2)) \cdot U(14)$$

注) $U(m)$ は m 次元 *unipotent* 群 の意味

$\omega_1 = \frac{1}{2}(u_2 \wedge u_4 \wedge u_6 - u_3 \wedge u_5 \wedge u_6)$, $\omega_2 = u_2 \wedge u_3 \wedge u_6$, $\omega_3 = u_2 \wedge u_5 \wedge u_6$

$\omega_4 = u_3 \wedge u_4 \wedge u_6$, $\omega_5 = u_4 \wedge u_5 \wedge u_6$, $\omega_6 = \frac{1}{2}(u_2 \wedge u_4 - u_3 \wedge u_5) \wedge u_7$

$\omega_7 = u_2 \wedge u_3 \wedge u_7$, $\omega_8 = u_2 \wedge u_5 \wedge u_7$, $\omega_9 = u_3 \wedge u_4 \wedge u_7$, $\omega_{10} = u_4 \wedge u_5 \wedge u_7$, $\omega_{11} = u_1 \wedge u_6 \wedge u_7$

$\omega_{12} = u_2 \wedge u_6 \wedge u_7$, $\omega_{13} = u_3 \wedge u_6 \wedge u_7$, $\omega_{14} = u_4 \wedge u_6 \wedge u_7$, $\omega_{15} = u_5 \wedge u_6 \wedge u_7$ は

V_{x_0} ($V_{x_0}^*$) の base であり (G_{x_0}, V_{x_0}) は

$$(\omega_1, \cdots, \omega_{15}) \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} GL(1) \times Sp(2) \times GL(2) \\ \square\square \otimes \text{日} \otimes \square \end{matrix} & \otimes & \times \\ \hline 0 & \begin{matrix} GL(1) \times GL(2) \\ \square\square^* \otimes \text{日} \end{matrix} & \times \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} GL(1) \times Sp(2) \times GL(2) \\ \square \otimes \square \otimes \text{日} \end{matrix} \end{array}\right)$$

の形をしており $V_{x_0} \ni x = \sum_{i=1}^{15} x_i \omega_i$ とすると, *localization* f_{x_0} は

$$\begin{aligned} f_{x_0}(x) = & (x_1 x_7 - x_2 x_6) x_{14} x_{15} + (x_1 x_9 - x_4 x_6) x_{12} x_{15} - (x_2 x_9 - x_4 x_7) x_{15}^2 \\ & - (x_4 x_{10} - x_5 x_9) x_{12}^2 - (x_2 x_{10} - x_5 x_7) x_{12} x_{14} + (x_1 x_{10} - x_5 x_6) x_{12} x_{13} \\ & - (x_2 x_{10} - x_5 x_7) x_{13} x_{15} + (x_2 x_8 - x_3 x_7) x_{14}^2 - (x_3 x_9 - x_4 x_8) x_{12} x_{14} \\ & - (x_1 x_8 - x_3 x_6) x_{13} x_{14} + (x_3 x_9 - x_4 x_8) x_{13} x_{15} + (x_3 x_{10} - x_5 x_8) x_{13}^2 \end{aligned}$$

となる。 $\frac{\partial}{\partial x_{11}} f_{x_0} = 0$ ゆえ $\mathrm{Hess}\, f_{x_0} = 0$ となる.

しかし conormal bundle で III) ⟷ VIII) が対応し (これも VIII の方から調べるのが容易) VIII が good orbit であるから §3 の Prop 2 により good orbit であることがわかるが, $\frac{\mathrm{Tr}_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)}$ $(A \in \mathfrak{g}_{x_0})$ は一定にならない.

IV) 21次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1)\times Sp(3))\cdot(G_a)^6$$

$(G_{x_0}, V_{x_0}) = \underset{\square\square\square \ \otimes \ 目}{GL(1)\times Sp(3)}$ は既約正則概均質ベクトル空間

ゆえ P.19 の Cor. より IV) は good orbit である。

$\dfrac{tr_{V_{x_0}}A}{\delta\chi(A)} = \dfrac{7}{2}$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ ゆえ $(s+\frac{7}{2})$ と対応する。

conormal bundle による対応は IV) $\longleftrightarrow$ VI) である。

V) 25次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1)\times GL(1)\times SL(3))\cdot U(14)$$

$\omega_1 = u_4\wedge u_5\wedge u_6$, $\omega_2 = u_1\wedge u_4\wedge u_7$, $\omega_3 = u_2\wedge u_5\wedge u_7$, $\omega_4 = u_3\wedge u_6\wedge u_7$,

$\omega_5 = (u_1\wedge u_5 + u_2\wedge u_4)\wedge u_7$, $\omega_6 = (u_2\wedge u_6 + u_3\wedge u_5)\wedge u_7$, $\omega_7 = (u_1\wedge u_6 + u_3\wedge u_4)\wedge u_7$

$\omega_8 = u_4\wedge u_5\wedge u_7$, $\omega_9 = u_5\wedge u_6\wedge u_7$, $\omega_{10} = u_4\wedge u_6\wedge u_7$ が V_{x_0}, または $V_{x_0}^*$ の base であり (G_{x_0}, V_{x_0}) を この base で表現すると

$(\omega_1, \cdots, \omega_{10})$

$GL(1)\times GL(1)\times SL(3)$ $\square\square\square\square\square^* \otimes 1 \otimes 1$	0	$\times$
0	$GL(1)\times GL(1)\times SL(3)$ $\square^* \otimes \square \otimes \square\square$	$\times$
0	0	$GL(1)\times GL(1)\times SL(3)$ $\square\square\square^* \otimes \square \otimes 目$

$x = \sum_{i=1}^{10} x_i\omega_i$ とすれば

$$f_{x_0}(x) = 2(x_5x_9x_{10} + x_6x_8x_{10} - x_7x_8x_9) - (x_4x_8^2 - x_2x_9^2 - x_3x_{10}^2)$$

で $\frac{\partial}{\partial x_1} f_{x_0} = 0$ ゆえ $\mathrm{Hess}\, f_{x_0} = 0$ となってしまう。$\frac{tr_{V_{x_0}}A}{\delta\chi(A)}$ は一定にならない。

conormal bundle で V) $\longleftrightarrow$ VII) が対応する。

VI) ^{26}次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1)\times SL(3)\times SL(3))\cdot(G_a)^6$$

$(G_{x_0}, V_{x_0}) = \underset{\square\otimes\square\otimes\square}{GL(1)\times SL(3)\times SL(3)}$ は 既約正則$\overset{P.V.}{}$ゆえ VI)は

good orbit である．($\deg f_{x_0} = 3$)

$\dfrac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)} = 3$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ ゆえ $(s+3)$ と対応する．

conormal bundle による対応 は VI) $\leftrightarrow$ IV) である．

VII) 28次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1)\times SL(3))\cdot U(12)$$

$\omega_1 = (u_2\wedge u_5 - u_3\wedge u_6)\wedge u_7$, $\omega_2 = (u_3\wedge u_6 - u_4\wedge u_7)\wedge u_5$

$\omega_3 = (u_2\wedge u_5 - u_4\wedge u_7)\wedge u_6$, $\omega_4 = u_2\wedge u_6\wedge u_7$, $\omega_5 = u_4\wedge u_5\wedge u_6$, $\omega_6 = u_3\wedge u_5\wedge u_7$

$\omega_7 = u_5\wedge u_6\wedge u_7$ が V_{x_0} (or $V_{x_0}^*$) の base で，(G_{x_0}, V_{x_0})

は $(\omega_1, \cdots, \omega_7)\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} GL(1)\times SL(3) \\ \square\square^*\otimes\square\square \end{matrix} & \begin{matrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} GL(1) \\ \square\square^* \end{matrix} \end{array}\right)$

で $f_{x_0}(x) = x_7^2$ $\left(x = \sum_{i=1}^{7} x_i\omega_i\right)$ である．

$V_{x_0}^{(1)} = \{\sum x_i\omega_i \mid x_7 = 0\}$ には G_{x_0} が作用するが

$(G_{x_0}, V_{x_0}^{(1)}) = \underset{\square\square^*\otimes\square\square}{GL(1)\times SL(3)}$ で χ に対応する相対不変式は

3次式，かつ その Hessian $\neq 0$ ($\because$ $GL(3)_{\square\square}$ は既約正則 P.V.)

よって P.23 の Prop 3 により $T^*_{G\cdot x_0}V \subset W$ がいえる． そして明らか

に $(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$ は P.V. ($\omega_1+\omega_2+\omega_3$ が gen. pt.) ゆえ good orbit で $\omega_1+\omega_2+\omega_3$ は V) に属するから conormal bundle による対応は V) $\longleftrightarrow$ VII).

$\frac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)}$ $(A \in \mathfrak{g}_{x_0}) = \frac{5}{2}$ ゆえ $(s+\frac{5}{2})$ と対応する.

VIII) 31次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1) \times GL(1) \times SL(2) \times SL(2)) \cdot U(10)$$

$(G_{x_0}, V_{x_0}) = \begin{array}{c} GL(1) \times GL(1) \times SL(2) \times SL(2) \\ \boxed{} \otimes \boxed{} \otimes \square \otimes \square \end{array}$ は既約正則 P.V. ゆえ good orbit である.

そして $\frac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)}$ $(A \in \mathfrak{g}_{x_0}) = 2$ ゆえ $(s+2)$ と対応する.

conormal bundle による対応は VIII) $\longleftrightarrow$ III) である.

IX) 34次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1) \times SL(2) \times SL(2)) \cdot (G_a)^8$$

$\dim V_{x_0} = 1$ ゆえ §3 の Prop 1 より good orbit である.

$\frac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)} = 1$ $(A \in \mathfrak{g}_{x_0})$ ゆえ $(s+1)$ と対応する. conormal bundle による対応は IX) $\longleftrightarrow$ II) である.

注) (G, V) 既約正則 P.V. なら codim 1 の orbit からは常に $(s+1)$ がでてくる. すなわち $\frac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)} = 1$ $(A \in \mathfrak{g}_{x_0})$. 他方 $\delta\chi(A) = \frac{\deg f}{\dim V} tr_V(A)$ だったから このことより $\deg f = \frac{tr_{V_{x_0}} A}{tr_V A} \dim V$ ($A \in \mathfrak{g}_{x_0}$, x_0 は codim 1 の orbit の点) が得られる. これが いわゆる 次数公式 である.

ついでに X) における isotropy subgroup について述べておくと

$G_{x_0} \sim (G_2)$、 従って $GL(7)/(G_2) \sim V - S$ は松島の定理により affine variety になり，従って S は超曲面であることがわかる. GL(7) は既約表現ゆえ S は既約超曲面になることが証明され，我々の仮定(P.1)が満たされていることがわかる.

注) (G_2) は rank 2 の例外群

$\deg b(s) = \deg f = 7$ が知られているから，以上で $b(s)$ が完全に求まった. すなわち

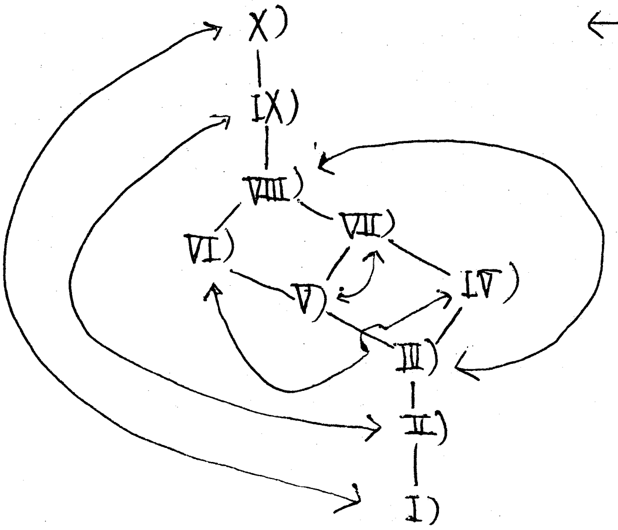
$$\boxed{b(s) = (s+1)(s+2)(s+\tfrac{5}{2})(s+3)(s+\tfrac{7}{2})(s+4)(s+5)}$$

Singular orbits との対応は I) $\leftrightarrow (s+5)$, II) $\leftrightarrow (s+4)$

III) $\leftrightarrow$ X (ナシ)　IV) $\leftrightarrow (s+\frac{7}{2})$　V) $\leftrightarrow$ X (ナシ)　VI) $\leftrightarrow (s+3)$

VII) $\leftrightarrow (s+\frac{5}{2})$　VIII) $\leftrightarrow (s+2)$　IX) $\leftrightarrow (s+1)$　であった.

orbits の closure による包含関係は下図のようになっている.



$\leftrightarrow$ Ep は conormal bundle による対応を表わす.

注) この例ではすべて good orbit であったが $T^*_{Gx_0}V \not\ni W$ となるような概均質ベクトル空間の例もある.