数理解析研究所講究録
第 225 巻 1975 年 292-297

複素積分と Lagrangean 多様体

青本和彦

§序　f を原点 0 で正則な n 変数 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ の函数とする．この時ベクトル場 grad Ref と $f=c$ （c は 0 に近い正数）の Cell 構造との関係について 1 つの問題を提出する．

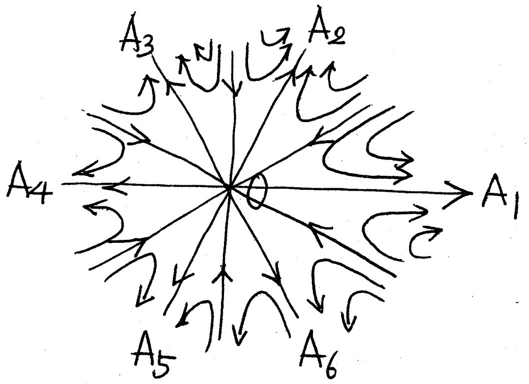
［問題］ベクトル場 $v=\mathrm{grad}\,\mathrm{Re} f$ の軌跡

$$\frac{dz_i}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\overline{\partial f}}{\partial z_i}$$

で $t=-\infty$ のとき原点 0 に集積するものの全体を $\mathfrak{M}$ とおくとき $\mathfrak{M}$ は n 次元の CW-複体で且つ実際には Lagrangean 多様体片からなっているだろうか？ $\mathfrak{M}\cap(f=c)$ は $f=c$ の Cell 構造を与えるだろうか？

例1.　$n=1$ として $f=z^n$ とする

すると grad $\mathrm{Re} f$ の軌跡上では $\mathrm{Im} f$ は const. になる. 図示すれば



原点を通るものは $\arg z = \frac{k\pi}{m}$ ($k=0, 1, 2, 3, \cdots, 2m-1$) この中で $t=-\infty$ で 0 を極限点として持つものは $\arg z = \frac{k\pi}{m}$ ($k=0, 2, \cdots, 2m-2$) の m 個存在する.

例2. $f = z_1^{m_1} + z_2^{m_2} + \cdots + z_n^{m_n}$

$m_1, m_2, \cdots, m_n \geqq 1$, 整数とすると

$\mathfrak{M}^-$ は 岡睦雄, Brieskorn−Pham 氏によって得られた join をつくることに相当している. Lagrangean 多様体になることも明らかである.

これらの $\mathfrak{M}^-$ は積分

$$\int e^{\lambda f(z)} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \qquad (\lambda \to +\infty)$$

の 漸近展開の表示のすべてを与えること
に相当している. 事実 $f(z)$ が上記
の例のような場合 $R = \mathbb{C}[z_1 \cdots z_n]$,
$M = \Omega^1(R)$ として R 上の外微分形式
$\bigoplus \bigwedge^p M = \Omega^{\cdot}$ 上に次のように定義される
De Rham hypercohomology $\mathbb{H}(\Omega^{\cdot})$

$$\nabla_\omega : \to \Omega^p \to \Omega^{p+1} \to$$
$$\omega = \lambda df$$

の ~~rank~~ に等しいだけの $\mathcal{M}^-$ を
構成出来る.

§2. 積分

$$\int f(z)^\lambda dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

を考える但し $f(z)$ は多項式とする. ベクトル場
$v = \mathrm{grad} \log |f(z)|$ を考え こんどは
[仮定 I] v の臨界点 ~~で~~ $f(z) \neq 0$
となるものはすべて孤立しているとする.

このとき　この孤立点達を　$P_1, \cdots, P_N$ とすれば
各孤立点　P_i に対応して局所的に
得られる　§1 の意味での Lagrangean
manifold 片　を　$\mathcal{U}$ によって　全域に
接続する。これを $\mathfrak{M}_{i1}, \cdots, \mathfrak{M}_{i\mu_i}$
$(1 \leq i \leq N)$ とおくとき　これらは $\mathfrak{M}$ 対
$\mathbb{C}^n, (f=0)$ の　相対 cycle を与える
ことになるが　これが次の hypercohomology
の双対基底を与えることになるであろうか？
すなわち　$\omega = \dfrac{df}{f}$ とおき　R を有理
函数で　$f=0$ にのみ極を持つものの
全体とする。　R 上の　微分形式環
$\Omega^{\cdot}$ に対して　De Rham cohomology
$\mathbb{H}(\Omega^{\cdot})$

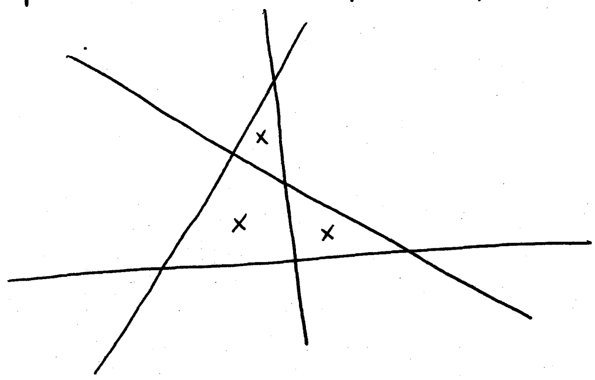
$$\left(\nabla_\omega : \to \Omega^p(R) \to \Omega^{p+1}(R) \to \atop \varphi \to d\varphi + \lambda \frac{df}{f} \wedge \varphi \right)$$

を考える。漸近展開 $(\lambda \to \infty)$ は各
$\mathfrak{M}_k$ に対応して　1つずつ存在する
であろうか？

例3 積分 （$f_1, \cdots, f_m$ real とする）

$$\int f_1^{\lambda_1}\cdots f_m^{\lambda_m}\,\varphi\, dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$$

を考える。ここで $f_1, \cdots, f_m$ を線型とする。φ は $(f_1=0)\cup\cdots\cup(f_m)$ でのみ極を持つ有理函数とする。$\lambda_j = \lambda_j^0 + n_j b$ （$n_j>0$ 整数）とおいて $f = f_1^{n_1} f_2^{n_2}\cdots f_m^{n_m}$ とおくとき grad log$|f|$ の臨界点はすべて実であってしかも $\mathbb{R}^n$ を壁 $\mathrm{Re} f_j = 0$ で仕切られた部屋で compact なものの中にのみ存在する。



今臨界点がすべて non-degenerate とすれば $\mathfrak{M}_j$ は compact な部屋そのものである。従って $H^n(\mathring{\Omega})$ の双対基底を与える。

文献 J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces
A. Weinstein, Normal modes for nonlinear Hamiltonian Systems
K. AOMOTO On vanishing of cohomology attached to certain multiplicative meromorphic functions