数理解析研究所講究録
第226巻 1975年 1-20

定数係数線型偏微分方程式の解の線状特異集合について

東大 教養　金子 晃

今まで解の延長可能性についていろいろ調べて来たが，場あたり的にやってゆくうちに何やら研究の方向のようなものが浮かびあがって来た。ここに調べようとするのは $\mathbb{R}^n$ 内の直線（それを x_n −軸にとることにする）の外側で定義された解が何時その直線まで延長できるかという問題であって，全体的構想の中で重要な一段階を占めている。始めは x_n 座標を reduce することにより孤立特異点の結果に含まれるであろうと簡単に考えて調べて見る気も起こらなかったが，いざやってみると種々の困難に遭遇し，最近やっと解析的道具が完成したにすぎない。それは一口に云えば凸でない問題に対する Fourier 解析の一手段を与えるものである。

例によって §1 でまず超函数解に対する結果（これはこの場合も易しい）を述べ，§2 で実解析解の延長に対する一つの十分条件を与えることにする。尚 §3 には今後のプログラ

ムを掲げ，大方の御批判を仰ぎたいと思っている。

§1. 超函数解の線状特異集合への接続

$\mathbb{R}^n$ の座標 $(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)$ を固定する。特異集合を
$K=\{(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\,;\ x_1=\cdots=x_{n-1}=0,\ -1<x_n<1\}$
としても一般性を失わない。U を K の凸開近傍の一つとし，$\mathbb{R}^n$ における K の閉包を L とする。$L\setminus K$ は二点 $P^\pm=(0,\pm 1)$ より成る。$p(D)$ を n 変数 $\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1},\zeta_n)$ の多項式 $p(\zeta)$ に対応する定数係数線型偏微分作用素とする。ここに $D=(D_1,\cdots D_{n-1},D_n)$, $D_j=\sqrt{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$. Harvey-Komatsu の定理により方程式 $p(D)u=0$ の超函数解 $\mathcal{B}_p$ に対し flabby 分解

(1.1) $$0\longrightarrow\mathcal{B}_p\longrightarrow\mathcal{B}\xrightarrow{p(D)}\mathcal{B}\longrightarrow 0$$

及び同型 $$H^i(U,\mathcal{B}_p)=0\ ,\quad i\geqq 1$$
を得る。故に $\mathcal{B}_p$ に対する基本完全列

$$0\longrightarrow H^0_K(U,\mathcal{B}_p)\longrightarrow H^0(U,\mathcal{B}_p)\longrightarrow H^0(U\setminus K,\mathcal{B}_p)$$
$$\longrightarrow H^1_K(U,\mathcal{B}_p)\longrightarrow \underset{\underset{\displaystyle 0}{\|}}{H^1(U,\mathcal{B}_p)}$$

より

$$H^1_K(U,\mathcal{B}_p)\cong\mathcal{B}_p(U\setminus K)/\widehat{\mathcal{B}_p(U)}$$

ここに

$$\widehat{\mathcal{B}_p(U)}=\mathcal{B}_p(U)/H^0_K(U,\mathcal{B}_p)$$

一方上の分解に伴う大域的切断の複体

$$0 \longrightarrow H^0_K(U, \mathcal{B}_p) \xrightarrow{p(D)} H^0_K(U, \mathcal{B}) \longrightarrow 0$$

から

$$H^1_K(U, \mathcal{B}_p) = H^0_K(U, \mathcal{B}) / p(D) H^0_K(U, \mathcal{B})$$

さらに，三つ組 $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^n \setminus (L \setminus K)$, $Z = \mathbb{R}^n \setminus L$ に $\mathcal{B}_p$ の基本完全列を適用して切除定理を用いると，

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0_{L \setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \longrightarrow H^0_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \longrightarrow H^0_K(U, \mathcal{B}_p) \\ &\longrightarrow H^1_{L \setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \xrightarrow{\lambda} H^1_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \longrightarrow H^1_K(U, \mathcal{B}_p) \\ &\longrightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^2_{L \setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p)} \end{aligned}$$

故に $\quad H^1_K(U, \mathcal{B}_p) \cong H^1_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) / \lambda H^1_{L \setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p)$

以上をまとめ，最後にコンパクトな L 等に対応する $H^1_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p)$ 等に *Fundamental Principle* を適用すると

<u>定理1</u>. $$\begin{aligned} \mathcal{B}_p(U \setminus K) / \widehat{\mathcal{B}_p(U)} &\cong H^1_K(U, \mathcal{B}_p) \\ &\cong H^0_K(U, \mathcal{B}) / p(D) H^0_K(U, \mathcal{B}) \\ &\cong H^1_L(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) / \lambda H^1_{L \setminus K}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_p) \\ &\cong \widetilde{\mathcal{B}[L]\{p, d\}} / \tilde{\lambda} \left[\widetilde{\mathcal{B}[P^+]\{p, d\}} \oplus \widetilde{\mathcal{B}[P^-]\{p, d\}} \right] \end{aligned}$$

ここに *Noether* 作用素 d は最も標準的なもの，すなわち適当な階数までの導函数を p の特性多様体 $N(p) = \{ p(\zeta) = 0 \}$ に制限したものとしておく。最後の同型は実際次のように与えられる：$u \in \mathcal{B}_p(U \setminus K)$ とし $[u] \in \mathcal{B}(U)$ を一つの拡張とする。$p(D)[u] \in H^0_K(U, \mathcal{B})$ となるが，これの台を最小

限に止めた一つの拡張 $[[p(D)[u]]] \in \mathcal{B}[L]$ をとる。Fourier 変換して d を施せば $d\widetilde{[[p(D)[u]]]} \in \widetilde{\mathcal{B}[L]}\{p, d\}$ を得るが，これは明に mod. $\tilde{\lambda}[\widetilde{\mathcal{B}[P^+]}\{p,d\} \oplus \widetilde{\mathcal{B}[P^-]}\{p,d\}]$ で一意に定まる．但し $\tilde{\lambda}$ は λ から自然に導かれた写像である。

さて $H_K^0(U, \mathcal{B}_p)$ は今の場合単独方程式であっても消えるとは限らない。

<u>命題 2.</u> $H_K^0(U, \mathcal{B}_p) \neq 0$ なるためには $p(\zeta)$ の既約因子のうちに最高階が ζ_n のみより成るものが含まれることが必要且つ十分である。(この条件は p の低階に依存する．例えば $\zeta_1\zeta_n + 1$)

<u>証明.</u> $H_K^0(U, \mathcal{B}_p)$ の自明でない元 $u(x)$ があったとしよう。$u(x)$ は p の既約成分を順次施してゆけばどこかで零となるのだから，始めから既約方程式 $p(D)u(x) = 0$ の K に台を持つ解としてよい。$[[u]] \in \mathcal{B}[L]$ を u の一つの拡張とすれば

$$(1.2) \qquad p(D)[[u]] = v^+ + v^-, \qquad \mathrm{supp}\, v^\pm \subset \{P^\pm\}$$

と書け，従って Fourier 変換により

$$(1.2') \qquad p(\zeta)\widetilde{[[u]]} = e^{i\zeta_n} J^+(\zeta) + e^{-i\zeta_n} J^-(\zeta)$$

と書ける．ここに $J^\pm(\zeta)$ は *infra-exponential* な整函数である．この式を代数多様体 $p(\zeta) = 0$ の上に制限すれば

$$(1.3) \qquad e^{i\zeta_n} J^+(\zeta)\Big|_{p(\zeta)=0} = -e^{-i\zeta_n} J^-(\zeta)\Big|_{p(\zeta)=0}$$

となる。さて，$p(\zeta)$ の最高階が ζ_n 以外の変数を含むとしよう。このとき（1.3）式の両辺は恒等的に0となることが示される。実際，p_m を p の主部として $N(p)$ の無限遠点は方程式 $p_m(\zeta)=0$ で定まる方向より成るが，それらの中には $\{\zeta_n=0\}$ に属さぬものが存在する。その点は $(x_1,\cdots,x_{n-1})$ の空間で適当な座標系をとれば $(a,0,\cdots,0,1)\infty$ と表わされ（$a\in\mathbb{C}$），従ってもとの方程式 $p(\zeta)=0$ の ζ_1 に関する根の中に $|\zeta_n|>\frac{1}{\delta}$，$|\zeta^*|<\delta$ において一様に

$$(1.4)\qquad \zeta_1=a(\zeta^*)\zeta_n+o(\zeta_n)$$

なる漸近形をもつものが存在することがわかる。ここに $\zeta^*=(\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-1})$。この関係を（1.3）に代入すれば

$$(1.5)\qquad e^{i\zeta_n}J^+(a(\zeta^*)\zeta_n+o(\zeta_n),\zeta^*,\zeta_n)$$
$$=-e^{-i\zeta_n}J^-(a(\zeta^*)\zeta_n+o(\zeta_n),\zeta^*,\zeta_n)$$

となる。さて ζ^* を固定し，$\mathrm{Im}\,\zeta_n\longrightarrow+\infty$ とすれば（1.5）の左辺の絶対値は明に任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$(1.6)\qquad \left|e^{i\zeta_n}J^+(a(\zeta^*)\zeta_n+o(\zeta_n),\zeta^*,\zeta_n)\right|\leqslant C_\varepsilon e^{-(1-\varepsilon)|\mathrm{Im}\,\zeta_n|}$$

一方もし（1.3）式の両辺が恒等的には0でなければ殆どすべての ζ^* に対し（1.5）式の右辺は恒等的には0でない。ところで infra-exponential な整函数に対するよく知られた評価により与えられた $\varepsilon>0$ に対し

$$J^-(\zeta_1,\zeta^*,\zeta_n)\geqslant e^{-\varepsilon(|\zeta_1|+|\zeta_n|)}$$

を満たすような点 (ζ_1, ζ_n) が十分沢山あり（例えば一変数の場合 Boas [1], Theorem 3.7.4）従って $\zeta_n^{(k)}$, $k=1,2,\cdots$ なる点列を

$$\mathrm{Im}\,\zeta_n^{(k)} \longrightarrow \infty \quad (k\to\infty)$$

$$(1.7)\quad J^-(a(\zeta^*)\zeta_n + o(\zeta_n), \zeta^*, \zeta_n) \geqq e^{-\varepsilon(|a(\zeta^*)|+2)|\mathrm{Im}\,\zeta_n|}$$

と満たすようにとることができる。故にこの点列に対し（1.5）式の右辺は

$$\left|-e^{-i\zeta_n^{(k)}} J^-(a(\zeta^*)\zeta_n^{(k)} + o(\zeta_n^{(k)}), \zeta^*, \zeta_n^{(k)})\right| \geqq e^{(1-\varepsilon(|a(\zeta^*)|+2))|\mathrm{Im}\,\zeta_n^{(k)}|}$$

ε を十分小さくとっておけばこの評価は先に得られた評価式（1.6）と矛盾し，従って（1.3）式の両辺は $|\zeta^*|<\delta$ を固定したとき恒等的に0であることがわかった。$N(p)$ は既約であるから一意接続が成り立ち，結局（1.3）式の両辺は恒等的に0であることがわかった。さて Fundamental Principle により $P(\zeta)\widetilde{w}^{\pm} = e^{\pm i\zeta_n} J^{\pm}(\zeta) = \widetilde{v}^{\pm}$ となる $\widetilde{w}^{\pm} \in B[p^{\pm}]$ が存在し，従って（1.2）より $[[u]] = w^+ + w^-$ となるが，これは u が自明でなかったことに反する。

逆にそのような p に対し K に台を持つ $p(D)u=0$ の自明でない解 u を与えることは双曲型方程式の基本解に関する河合氏［6］の結果を用いれば容易に示されるが，ここで直接の証明を与えておこう。（1.2′）式において $J^{\pm}(\zeta)$ は $p(\zeta)$ で割り切れぬが，$e^{i\zeta_n}J^+(\zeta) + e^{-i\zeta_n}J^-(\zeta)$ が $p(\zeta)$

で割り切れるようなものを与えれば十分である。簡単の為 $J^+(\zeta)=1$ とおけば，$J^-(\zeta)$ としては $e^{2i\zeta_n}$ を $p(\zeta)$ で割った剰余，すなわち

$$J^-(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(mk)!}+\cdots+\frac{\zeta_n^{m-1}}{(mk+m-1)!}\right)(p(\zeta)-\zeta_n^m)^k$$

を採るべきである。仮定により $p(\zeta)-\zeta_n^m$ は $m-1$ 次の多項式であるから，これは確かに infra-exponential な整函数である。

<u>定理3.</u> $\mathcal{B}_p(U\setminus K)/\widehat{\mathcal{B}_p(U)}=0$ なるためには $p(\zeta)$ の最高階が ζ_n のみより成ることが必要且つ十分である。

<u>証明.</u> この条件は明に $p(\zeta)$ の各既約成分に課された同じ条件と同値である。さて，$p(\zeta)$ の最高階が ζ_n のみより成るとき代数多様体 $p(\zeta)=0$ の上で $\widehat{\mathcal{B}[L]}$，$\widehat{\mathcal{B}[P^\pm]}$ に対応する三つの増大度はすべて同値となる。故に定理1の最後の同型を用いて容易に $\mathcal{B}_p(U\setminus K)/\widehat{\mathcal{B}_p(U)}=0$ を得る。

逆の証明は命題2におけると同様 $p(\zeta)$ を既約としてよい。E を $p(D)E=\delta$ の基本解とすれば $E\in\mathcal{B}(U\setminus K)$，従って $u\in H^0_K(U,\mathcal{B})$ を適当にとれば $p(D)(E-u)=0$ となるわけである。故に $[[u]]\in\mathcal{B}[L]$ を u の一つの拡張とすれば

$$p(D)[[u]]=\delta+v^++v^-,\quad \mathrm{supp}\, v^\pm\subset P^\pm \tag{1.8}$$

となる。故に代数多様体 $p(\zeta)=0$ の上で

$$e^{i\zeta_n}J^+(\zeta)\Big|_{p(\zeta)=0}+e^{-i\zeta_n}J^-(\zeta)\Big|_{p(\zeta)=0}+1=0 \tag{1.9}$$

と書ける。故にもし $p(\zeta)$ の最高階が ζ_n 以外を含めば，命題2の証明と同じく（1．4）を満たす根の存在を仮定し，それを（1．9）の両辺に代入すれば全く同様の論法により矛盾が導かれる。

注意4． 命題2を参照すれば，解が一意に延びるという状況はあり得ないことがわかる。

§2．実解析解の接続

今度は $p(D)u=0$ の実解析解 $\mathfrak{A}_p$ を考える。簡単の為まず座標系を決めた結果を与えることにする。

定理5． L を超平面 $\{x_1=0\}$ 内の凸コンパクト集合で $K=L\cap\{-1<x_n<1\}$ に対し $L=\overline{K}$ であるとする。U を K の凸開近傍とする。$p(\zeta)$ は ζ_1 に関し Kowalevskian な m 次の既約多項式とし，$p(\zeta)=0$ の ζ_1 に関する根 $\tau_j(\zeta')$，$j=1,\cdots,m$ は

(2.1) $|\mathrm{Im}\,\tau(\zeta')|\leqq a(|\mathrm{Re}\,\zeta_2|^g+|\mathrm{Re}\,\zeta_n|^g)+b(|\mathrm{Im}\,\zeta_2|+|\mathrm{Im}\,\zeta_n|)+c|\zeta''|$

を満たすとする。ここに $\zeta'=(\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_n)$，$\zeta''=(\zeta_3,\cdots,\zeta_{n-1})$，$n\geqq3$ であり $g<1$。このとき自然な写像

(2.2) $\mathfrak{A}_p(U\setminus K)/\mathfrak{A}_p(U)\longrightarrow\mathcal{B}_p(U\setminus K)/\widehat{\mathcal{B}_p(U)}$

の像は0である。

証明． この場合も $L\setminus K$ は2個の凸な連結成分に分かれる。それを $P^{\pm}$ と書いても混乱は起こらないであろう。定理

1の最後の同型はこの場合もそのまま成り立つ（今の場合命題2により$\mathcal{B}_p(U)$の上の$\widehat{\ }$は不要である）。$u \in \mathfrak{O}_p(U \setminus K)$に対し$F(\zeta) = \widehat{[[p(D)[u]]]}\big|_{N(p)}$が一つの代表元である。

さて$\chi(x) \in C^\infty(U)$をKの十分小さいε-近傍に台を持ちKのさらに小さい近傍の上で恒等的に1に等しく，かつ$\overline{\mathrm{supp}\,\chi} \cap \partial U \subset L \setminus K$なるように選ぶと

$$p(D)[[[(1-\chi(x))u]_0 - [u]]]$$
$$\equiv [[p(D)([(1-\chi(x))u]_0 - [u])]] \quad \mathrm{mod}\ \mathcal{B}[L \setminus K]$$

ここに$[(1-\chi(x))u]_0$はKの近傍へ0で拡張した$C^\infty(U)$の元を表わし，$[[\ \ ]]$は$\mathcal{B}(U)$の元の$\mathcal{B}_*(\mathbb{R}^n)$の元への台を最小限に止めた拡張を表わす。故に

$$F(\zeta) \equiv \widehat{[[p(D)[(1-\chi(x))u]_0]]}\big|_{N(p)}$$
$$\mathrm{mod}\ \widehat{\mathcal{B}[p^+]}\{p, d\} \oplus \widehat{\mathcal{B}[p^-]}\{p, d\}$$

さて$J(D)$を任意の local operator としよう。以上のことは$\mathfrak{O}_p(U \setminus K)$の他の元$J(D)u$についても成り立ち，また明に$J(\zeta)F(\zeta)$は$J(D)u$の上の同型表現における一つの代表元であるから

$$J(\zeta)F(\zeta) \equiv \widehat{[[p(D)[(1-\chi(x))J(D)u]_0]]}\big|_{N(p)}$$
$$\mathrm{mod}\ \widehat{\mathcal{B}[p^+]}\{p, d\} \oplus \widehat{\mathcal{B}[p^-]}\{p, d\}$$

次に$\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$を$P^\pm$の$\varepsilon$-近傍に台を持ち，かつそれらの$\frac{\varepsilon}{2}$-近傍では恒等的に1に等しいように選べば，

$$w(x) = (1-\varphi(x))\, p(D)[(1-\chi(x))J(D)u]_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$v^\pm(x) = [[p(D)[(1-\chi(x))J(D)u]_0]] - w(x)$ の上下の成分

とおくことにより

(2.3) $\quad J(\xi)F(\xi) = \tilde{w}(\xi)\big|_{N(p)} + \tilde{v}^+(\xi)\big|_{N(p)} + \tilde{v}^-(\xi)\big|_{N(p)}$

となる。ここで u が実解析函数，従って w が C^∞ 級であるという情報を Fourier 像に反映させて何らかの結論を引き出そうというわけである。おつりの部分 $v^\pm(x)$ が上下にわかれてこれらの台の凸包はもとの集合全体と一致するという情況のために，普通用いられる増大度評価による Fourier 解析の手法はここでは全く役に立たない。代わりに用いられる道具は

補題 6. Fourier 超函数 $u(x)$ が原点の近傍で実解析的なためにはすべての導函数 $J(D)u(x)$ が原点に有限な値をもつことである。ここに値は Fourier 像に対する Abel 極限

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} J(\xi)\tilde{u}(\xi) e^{-\varepsilon\sqrt{|\xi|^2+1}}\, d\xi$$

を用いて定義される。(証明は [5] Theorem 3.8 を見よ.)(後注)

さて $N(p)$ 上の函数に適当な $n-1$ 変数の自由空間の函数を対応させ，それにこの補題を適用したいのであるが，[3] におけるように対称多項式を経由したのでは情報が乱れてしまってうまくゆかない。そこで境界値問題の手法を借りて $N(p)$ 上の正則函数 $F(\xi)$ に

(2.4) $\quad f(\zeta)=f_0(\zeta')+\zeta_1 f_1(\zeta')+\cdots+\zeta_1^{m-1}f_{m-1}(\zeta')$

の形の $\mathbb{C}^n$ 上の整函数を対応させることにする. $F(\zeta)=f(\zeta)|_{N(p)}$ であるが逆に $f(\zeta)$ の各係数を Cramer の公式により

$$(2.5)\quad f_0(\zeta')=\frac{\begin{vmatrix} F(\tau_1(\zeta'),\zeta') & \tau_1(\zeta') & \cdots & \tau_1(\zeta')^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F(\tau_m(\zeta'),\zeta') & \tau_m(\zeta') & \cdots & \tau_m(\zeta')^{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \tau_1(\zeta') & \cdots & \tau_1(\zeta')^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \tau_m(\zeta') & \cdots & \tau_m(\zeta')^{m-1} \end{vmatrix}}$$

等と定めることにより逆対応 $B: F(\zeta)\longrightarrow f(\zeta)$ が定まる. この対応は線型であるから $\widetilde{B[L]}$ 等に対応する増大度はそのまま保たれ, 従ってもとの解 $u(x)$ に $n-1$ 変数の整函数の組 $f_0(\zeta'),\cdots,f_{m-1}(\zeta')$ を対応させる写像は

(2.6) $\quad \mathcal{B}_p(U\setminus K)/\widetilde{\mathcal{B}_p(U)}\longrightarrow \widetilde{\mathcal{B}[L]}^m/\widetilde{\mathcal{B}[p^+]}^m\oplus\widetilde{\mathcal{B}[p^-]}^m$

なる同型写像を与えることがわかる。$\mathcal{B}[L]$ 等は L 等に台をもつ $n-1$ 変数の超函数を表わす。

さて, 対応 B は線型であるから (2.3) に施せば右辺の和は同じように和に分れる。

$B[\tilde{w}(\zeta)|_{N(p)}]=g(\zeta)=g_0(\zeta')+\zeta_1 g_1(\zeta')+\cdots+\zeta_1^{m-1}g_{m-1}(\zeta')$

$B[\tilde{v}^{\pm}(\zeta)|_{N(p)}]=h^{\pm}(\zeta)=h_0^{\pm}(\zeta')+\zeta_1 h_1^{\pm}(\zeta')+\cdots+\zeta_1^{m-1}h_{m-1}^{\pm}(\zeta')$

とおこう。$\chi(x)$, $\varphi(x)$ を十分滑らかな Gevrey class に

属するように選んでおけば w, $v^{\pm}$ の作り方より, $N(\varphi)$ 上で

(2.7) $|\tilde{w}(\zeta)| \leq C \exp(\varepsilon|\mathrm{Im}\,\zeta| + H_L(\mathrm{Im}\,\zeta) - A|\mathrm{Re}\,\zeta|^{g})$

$$|\tilde{v}^{\pm}(\zeta)| \leq C_\eta \exp(\eta|\zeta| + \varepsilon|\mathrm{Im}\,\zeta| + H_{P^{\pm}}(\mathrm{Im}\,\zeta))$$
$$(\forall \eta > 0, \ \exists C_\eta > 0)$$

なる評価を満たす。ここに $H_L(\mathrm{Im}\,\zeta) = \sup_{x \in L} \mathrm{Re}\, x\cdot\zeta$, $H_{P^{\pm}}(\mathrm{Im}\,\zeta)$ は L, $P^{\pm}$ の支持函数であり, 実際には $\mathrm{Im}\,\zeta'$ のみの函数である。故に (2.5) 式と $\tau_j(\zeta')$ に関する仮定 (2.1) とから

(2.8) $|g_j(\zeta')| \leq C|\zeta'|^{\frac{m(m-1)}{2}} \exp(c\varepsilon|\mathrm{Re}\,\zeta''| + (1+b+c)\varepsilon|\mathrm{Im}\,\zeta'| + H_L(\mathrm{Im}\,\zeta') - a'|\mathrm{Re}\,\zeta'|^{g})$

$$|h_j^{\pm}(\zeta')| \leq C_\eta \exp(c\varepsilon|\mathrm{Re}\,\zeta''| + \eta|\zeta'| + (1+b+c)\varepsilon|\mathrm{Im}\,\zeta'| + H_{P^{\pm}}(\mathrm{Im}\,\zeta'))$$

を得る。ここに $a' = A - \varepsilon a > 0$ とした。さて (2.3) において $J(\zeta)$ として ζ' のみを含むものを選んでおけば両辺に写像 B を施した結果として

(2.9) $J(\zeta')f_j(\zeta') = g_j(\zeta') + h_j^{+}(\zeta') + h_j^{-}(\zeta')$

$$j = 0, 1, \cdots, m-1$$

が得られる。ここで $f_j(\zeta')$ の方は先に注意したように $\widetilde{\mathcal{B}[L]}$ 型の評価を満たし, 従って L に台を持つ $n-1$ 変数の超函数の Fourier 像である。ところが $g_j(\zeta')$, $h_j^{\pm}(\zeta')$ の上の評価においては ζ' の実部が有限の大きさで現われているた

めこのままでは実な台をもつ函数のFourier像と見なせない。この困難を克服するため，変数を実に制限し両辺に $e^{-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}}$ を掛けると

(2.10) $J(\xi')f_j(\xi')e^{-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}}$

$$= g_j(\xi')e^{-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}} + h_j^+(\xi')e^{-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}} + h_j^-(\xi')e^{-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}}$$

となる。ここで $g_j(\xi')e^{-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}}$ は明に C^∞ 級の急減少函数のFourier像となり積分

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_j(\xi')e^{ix'\xi'-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}}\,d\xi'$$

は任意の $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ に対し絶対収束の意味で存在する。一方，評価(2.8)を参照して［6］Lemma 5.1.2 を適用すれば(註) $h_j^\pm(\xi')e^{-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}}$ は特異台(analytic sing. supp.)が集合 $P^\pm+\{x_2=x_n=0\}$ の $(1+b+c)\varepsilon$ − 近傍に含まれるようなFourier超函数のFourier像であることがわかる。故に補題6により x' が $P^\pm+\{x_2=x_n=0\}$ の $(1+b+c)\varepsilon$ − 近傍に属さなければ有限な極限

$$\lim_{\delta\downarrow 0}(2\pi)^{-(n-1)}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_j^\pm(\xi')e^{\overbrace{ix'\cdot\xi'+}-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}}e^{-\delta\sqrt{|\xi'|^2+1}}\,d\xi'$$

が存在する。この二つを合わせて(2.9)より結局 x' が $P^\pm+\{x_2=x_n=0\}$ の $(1+b+c)\varepsilon$ − 近傍に属さぬとき有限な極限

$$\lim_{\delta\downarrow 0}(2\pi)^{-(n-1)}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} J(\xi')f_j(\xi')e^{ix'\cdot\xi'-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}}e^{-\delta\sqrt{|\xi'|^2+1}}\,d\xi'$$

(註) 特異台はコンパクトでないが，このLemmaの証明は自明に拡張できる。

が存在することになる。J は任意だから再び補題6を用いれば Fourier 逆像 $\mathcal{F}^{-1}[f_j(\xi')e^{-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}}]$ は $P^{\pm}+\{x_2=x_n=0\}$ の $(1+b+c)\varepsilon$ 一近傍の外で実解析的なことがわかった。さて，先に述べた如く $f_j(\xi')$ は台が L に含まれる超函数の Fourier 像であるから合成積の結果として $\mathcal{F}^{-1}[f_j(\xi')e^{-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}}]$ の台は $\{|x_2|\leq dis(0,L)\}$ に含まれる。故に実解析函数の一意接続性により $\mathcal{F}^{-1}[f_j(\xi')e^{-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}}]$ の台自身が $P^{\pm}+\{x_2=x_n=0\}$ の $(1+b+c)\varepsilon$ 一近傍に含まれることがわかった。

さて $\varepsilon\downarrow 0$ のとき $\mathcal{F}^{-1}[f_j(\xi')e^{-2c\varepsilon\sqrt{|\xi''|^2+1}}]$ は超函数の局所位相の意味で，すなわち方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}+4c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}-1\right)\right]u=0$$

の解の非特性面 $\{\varepsilon=0\}$ への境界値として $\mathcal{F}^{-1}[f_j(\xi')]$ に収束することが先に引用した［5］の Theorem 3.8 の証明と同様の論法でわかる。故に（ε は任意であるから）結局極限 $\mathcal{F}^{-1}[f_j(\xi')]$ の台は $P^{\pm}$ に含まれることがわかった。対応 B により増大度も互いに対応していたことを思いだし，逆にもどれば $F(\zeta)\in\widetilde{\mathcal{B}[P^+]}\{p,d\}\oplus\widetilde{\mathcal{B}[P^-]}\{p,d\}$ が得られたことになる。定理の同型によりこれはもとの解 u が超函数解として U 全体にのびたことを意味し，われわれの主張が証明された。

さらに，解 $u(x)$ が単なる超函数解としてだけでなく，真に実解析解として延びるかどうかを見るには，例によって超函数解に対する propagation of regularity を見ればよい。例えば（Kawai［7］）$p(D)$ が単純特性的でかつ陪特性曲線がすべて x_n 軸と横断的ならばよい 以上をまとめると

系7. 再び $K=\{(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\,;\ x_1=\cdots=x_{n-1}=0,\ -1<x_n<1\}$ とする。$p(D)$ の各既約因子 $p_\lambda(D)$ は R^{n-1} における適当な座標変換により（2.1）の条件を満たし，かつ

$$0\to\mathcal{A}_p(U\setminus K)/\mathcal{A}_p(U)\longrightarrow\mathcal{B}_p(U\setminus K)/\widehat{\mathcal{B}_p(U)}\qquad(\text{完全})$$

という propagation of regularity の性質をもつとする。このとき $\mathcal{A}_p(U\setminus K)/\mathcal{A}_p(U)=0$.

この証明は $p_\lambda(D)u=f\in\mathcal{A}(U)$ なる方程式の実解析解を求めて修正することにより各因子に定理5（及び上の注意）を適用して帰納的に遂行される．この方程式を解く段階で解 u の存在域が少しずつ減るので，最後の段階ではもとの実解析解は $K_\varepsilon=\{(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\,;\ x_1=\cdots=x_{n-1}=0,\ -1+\varepsilon<x_n<1-\varepsilon\}$ までしかのびないかもしれないが，ε は任意だから一意接続性により結局は K 全体まで延びるのである。

我々の結果が適用できる例として ultra-hyperbolic equation

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_{k+1}^2}-\cdots-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (1\leq k\leq n-2)$$

をあげておこう。$k=0$, n の場合は楕円型で，従って自明な反例があり，また $k=n-1$ のときにも $n-1$ 変数 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ に関する Laplacian の基本解をとれば反例となる。

§3. ハッタリ

ここで導入した方法は $p(D)u=0$ の実解析解の非特性平面 $\{x_1=0\}$ への境界値の S.S. を評価する問題に応用できる。実際 $p(D)$ に対する定理5 の条件の下に $p(D)u=0$ の $x_1>0$ における任意の実解析解の $\{x_1=0\}$ への境界値は x_2 を実解析的パラメタとすることがほぼ証明できるのであり，上の証明もその線に沿って遂行されているのである。さらに進んで実解析解の境界値の S.S. を完全に決定すること

は非常に興味ある問題であるが、これができれば実解析解の延長に関する問題は殆どすべて解けてしまうのである。例えば $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)u=0$ の実解析解 $u(x)$ が $\{x_1=0\}$ 平面に含まれるような除外曲線 C を持つとき C は実解析的でなければならぬことがこの方法で証明されるはずである。さらに楕円型以外の境界値問題では m コの境界値たちの間に可逆でない関係が存在することが一般に認知されているが、この場合にこの関係式が求まれば曲線 C の形はさらに（もしかしたら二次曲線まで？）制限されるはずである。一般の方程式でもこのようになっているのであろう。すなわち方程式 $p(D)u=0$ が与えられたとき、これに応じて実解析解の除外集合として可能な最低次元の線型部分空間が定まり、同じ次元の一般の除外集合はこれをこの方程式に固有なある解析的変換群で曲げたもので尽され、さらに一般の除外集合はこれらの積分で与えられるというように。

実解析解の延長の問題での困難は既約成分のとり出しであるが、これは境界値に対する考察においても同様である。定数係数の場合、既約成分の意味は代数的に明白であるが、変数係数の場合には逆に境界値の方の既約分解（例えば何らかの Galois 群のようなものの作用に対する）によってこの既約成分をとり出す困難を克服することが考えられる。よって将

来別の方法で実解析解の境界値のS.S.の決定が変数係数に対しても可能となれば，実解析解の延長の問題は初めて体系的に解かれることになるであろう。

（後注）　この定理は［4］Lemma 1の拡張で$e^{-\varepsilon|\xi|}$の代わりに$e^{-\varepsilon\sqrt{|\xi|^2+1}}$を用いる外本質的な差はない。

文 献

[1] Boas, R.P.JR., Entire Functions, Academic press New York, 1954.

[2] Kaneko, A., Theorems on the extension of solutions, 数理解析研究所講究録 162 (1972), 21-37.

[3] ________, On continuation of regular solutions of partial differential equations with constant coefficients, J. Math. Soc. Japan, 26 (1974), 92-103.

[4] ________, Generalized unique continuation property for hyperfunctions with real analytic parameters, 数理解析研究所講究録 209 (1974), 118-124.

[5] ________, Remarks on hyperfunctions with analytic parameters, submitted to J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec.IA.

[6] Kawai, T., On the theory of Fourier hyperfunctions and its application to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA.

17 (1970), 467-517.

[7] ———, Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients (I), Publ. RIMS, Kyoto Univ. 7 (1971), 363-397.