数理解析研究所講究録
第 226 巻 1975 年 105-113

単一特性的でない場合の浜田の定理について

名大 理 柏原正樹
京大 数理研 河合隆裕

浜田の定理は、単一特性的な作用素Pに対し、その陪特性曲線が初期平面と横断的に交わる時、初期データと解の構造の関係を明快にした。それは、我々の立場から言えば、Pの"Riemann函数"の満たす極大過剰決定系を求めていることに他ならない。(たとえば、佐藤－河合－柏原、数学25-3 定理2.11を参照）浜田の定理は、Pが多重度一定の場合には容易に拡張される。(佐藤－河合－柏原の同上定理、又、浜田氏自身による(接触変換を用いない)証明もある。(氏の学会講演('74.4)) しかしながら、Pが単一特性でない時、あるいは、単一特性であっても陪特性曲線が初期平面と接する時には本質的に新しい困難が生じる。しかも、幾何学に自然に現われる作用素で単一特性的でないものもあり、又、(たとえば)回折波の現象を理解するにはどうしても後者の困難は克服しなければならない。

実は、単一特性の場合と異なり、解の特異点のまわりでのモノドロミーの構造は複雑であり、その為に、実領域での結果を得るには、更に多くの努力が必要とされるので、ここでは、複素領域における基礎的な部分の解説を行う。尚、単一特性でない作用素の実領域での解析については、柏原－河合－

大島による(本集会での)講演を思い出されたい。

さて，Pが単一特性ではあるが，陪特性曲線が初期平面$\{x_1=0\}$に接する場合の考察をまず行おう。

この場合，genericな場合には，Pは$P_0=D_1^2-(x_1+x_3)D_2^2$ (near $(0;dx_2\infty)$) という標準型を(micro-localに)持つ，と予想されている。(佐藤) Tricomiの作用素は，この退化した場合と考えられる。では，P_0について"浜田の定理"はどのような形になるか，具体的に計算してみよう。即ち，試みに次の方程式の解を形式的に求めてみよう。(以下 P_0を本稿では佐藤の作用素と呼ぶことにする。)

$$\begin{cases} P_0 u = 0 \\ u|_{x_1=0} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = (x_2+ax_3)^\lambda \end{cases}$$

この解は，

$$u = (x_1+x_3)x_2^\lambda F_4\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}(-\lambda+1); \frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4(x_1+x_3)^3}{9(x_2+ax_3)^2}, \frac{4x_3^3}{9(x_2+ax_3)^3}\right)$$

$$- x_3 x_2^\lambda F_4\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}(-\lambda+1); \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{4(x_1+x_3)^3}{9(x_2+ax_3)^2}, \frac{4x_3^3}{9(x_2+ax_3)^3}\right)$$

と与えられる。

因みに

$$\begin{cases} P_0 v = 0 \\ v|_{x_1=0} = (x_2+ax_3)^\lambda \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = 0 \end{cases}$$

の形式解は $v=$

$$=(x_2+ax_3)^{\lambda} F_4\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{4(x_1+x_3)^3}{9(x_2+ax_3)^2}, \frac{4x_3^3}{9(x_2+ax_3)^2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)(x_2+ax_3)^{\lambda-2}(x_1+x_3)x_3^2 \times$$

$$\times F_4\left(\frac{1}{2}(-\lambda+2), \frac{1}{2}(-\lambda+3); \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{4(x_1+x_3)^3}{9(x_2+ax_3)^2}, \frac{4x_3^3}{9(x_2+ax_3)^2}\right)$$

により与えられる。但し、ここに $F_4(\alpha, \beta; \gamma, \gamma'; x, y)$ は Appell の2変数超幾何函数

$$\sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n 。$$

勿論，ここで $x_3=0$ とおけば，これらは Bader-Germain, Leray, Delache 等により研究された．Tricomi の方程式の基本解となって，通常の超幾何函数で表現される。このことからも，Tricomi の方程式は回折波の現象のモデルとしては，やや特殊に過ぎることが理解されよう。(初期平面を $\{x_1=0\}$ とする限り。) Ludwig 等による caustics における漸近解の研究も，この意味で不十分であるように思われる。ただ Tricomi の方程式はかなり取り扱い易いので，ここで我々の立場でそれをどのように捕えるべきかを考えておこう。まず，Tricomi の作用素にしろ，佐藤の作用素にしろ，単一特性故，境界条件を考慮

しない限り，可解性についての問題はないから，高次の Ext 群は考えなくても構わないことに注意しておこう。

さて Tricomi の方程式については 2つの特別な形式解があることを思い出しておこう。それは，

$$u_0 = \left(-\frac{x_1^3}{9} + \frac{x_2^2}{4}\right)^{-\frac{7}{6}} \quad と \quad u_1 = x_1\left(-\frac{x_1^3}{9} + \frac{x_2^2}{4}\right)^{-\frac{5}{6}}$$

である。この2つの解は，各々形式的には，$\left.\frac{\partial u_0}{\partial x_2}\right|_{x_1=0} = 0$，$u_1|_{x_1=0} = 0$ と考えられるけれど，$\frac{x_1^3}{9} - \frac{x_2^2}{4} = 0$ 上での u_0 の order と u_1 の order の差は $(2/3)$ であり，通常の $\mathcal{P}$ の範囲内では，u_0 と u_1 は同値になり得ない。従って，この場合は擬微分作用素として分数階の物も許しておいた方が都合がよい。それを以下 $\tilde{\mathcal{P}}$ と記そう。今 $D_{x_2}^{\lambda} u_0$ の満たす極大過剰決定系を $\mathcal{M}_\lambda$ としよう。$\mathcal{M}_\lambda$ は具体的には次式により与えられる。

$$\begin{cases} (D_1^2 - x_1 D_2^2)u = 0 \\ \left(\frac{1}{3}x_1 D_1 + \frac{1}{2}x_2 D_2 + \frac{1}{6} + \lambda\right)u = 0 \\ \left(x_2 D_1 + \frac{x_1^2}{3} D_2 + \lambda D_1 D_2^{-1}\right)u = 0 \end{cases}$$

ここで $\mathcal{M}_\lambda$ の $\{x_1 = 0\}$ への制限を考えると，それは

$$\mathcal{P}_2 D_2^{\lambda}\, x_2^{-\frac{1}{3}} \oplus \mathcal{P}_2 D_2^{\lambda + \frac{2}{3}} x_2^{-\frac{1}{3}}$$

従って $\tilde{\mathcal{P}}$ で考えれば

$$\tilde{\mathcal{M}}_\lambda|_{x_1=0} \simeq [\tilde{\mathcal{P}}\,\delta(x_2)]^2$$

従って $\tilde{\mathcal{M}}_\lambda|_{x_1=0}$ から $\tilde{\mathcal{P}}_2\delta(x_2)$ への $\tilde{\mathcal{P}}_2$-homomorphism は独立な物が2つ指定できる。即ち、$\mathcal{L}=\tilde{\mathcal{P}}/\tilde{\mathcal{P}}(D_1^2-x_1D_2^2)$ とおいて

$$\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{P}}}(\mathcal{L},\mathcal{M}_\lambda)\to\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{P}}_2}(\mathcal{L}|_{x_1=0},\tilde{\mathcal{M}}_\lambda|_{x_1=0})$$

$$=\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{P}}_2}(\tilde{\mathcal{P}}_2^{\,2},\tilde{\mathcal{M}}_\lambda|_{x_1=0})\longrightarrow[\tilde{\mathcal{P}}_2\delta(x_2)]^3$$

なる写像が2ケ存在する。この $\tilde{\mathcal{M}}_\lambda|_{x_1=0}\to\tilde{\mathcal{P}}_2\delta(x_2)$ への写像を定めることが、実領域での境界値問題その他を考える時には重要である。

次に、佐藤の作用素の場合には事態はどうなっているかを調べよう。この場合、Tricomi の作用素の初期値問題の基本解の満たす極大過剰決定系 $\mathcal{M}_\lambda$ より出発して、佐藤の作用素に対する物（再び $\mathcal{M}_\lambda$ と記す）も容易に求められる。それは：

$$\mathcal{M}_\lambda:\begin{cases}P_0\,u=0\\((D_1-D_3)^2-x_3D_2^2)\,u=0\\\left(\frac{1}{3}x_1D_1+\frac{1}{2}x_2D_2+\frac{1}{3}x_3D_3-\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{2}{3}\right)\right)u=0\end{cases}$$

。ここで

$$(\#)\quad \mathcal{M}_\lambda|_{x_1=0}=\mathcal{P}'u_0+\mathcal{P}u_1$$

とすれば、(u_0,u_1) は次の関係式により結ばれている。

$$\begin{cases}D_3^2u_0-2D_3u_1=0\\D_3^2u_1-2(x_3D_3+1)D_2^2u_0=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}x_2D_2+\frac{1}{3}x_3D_3-\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{2}{3}\right)\right)u_0=0 \\ \left(\frac{1}{2}x_2D_2+\frac{1}{3}x_3D_3-\frac{\lambda}{2}\right)u_1=0 \end{cases}$$

こゝで

$$\mathcal{M}_\lambda|_{x_1=0} \longrightarrow \mathcal{P}'x_2^\lambda$$

なる写像を $u_0\mapsto 0$, $u_1\longmapsto x_2^\lambda$ として定めると，

これは split して $\left(\because x_2^\lambda \longmapsto u_1-\frac{D_3}{2}u_0\right)$

$$\mathcal{M}_\lambda|_{x_1=0} = \mathcal{P}'x_2^\lambda \oplus \mathcal{P}'/\mathcal{J}$$

但し $\mathcal{J}=\mathcal{P}'\left(\frac{1}{3}D_3^3-(2x_3D_3+1)D_2^2\right)$

$$+\mathcal{P}'\left(\frac{1}{3}x_3D_3+\frac{1}{2}x_2D_2-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

となる。

ここで第2の因子は複雑故，第1の因子にのみ注目して $\mathcal{M}_\lambda|_{x_1=0}\xrightarrow{\ell}\mathcal{P}'x_2^\lambda$ なる写像を固定すると次の同型が成立する：

$$\mathcal{H}om(\mathcal{L}_0,\mathcal{M}_\lambda)\Big|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}} \simeq \mathcal{H}om(\mathcal{D}'^{2},\mathcal{P}'x_2^\lambda)$$

（但し $\mathcal{L}_0=\mathcal{P}/\mathcal{P}P_0$ ）

実際，$\mathcal{M}_\lambda$ の生成元 F を一つ固定すると，$\mathcal{H}om(\mathcal{L}_0,\mathcal{M}_\lambda)\Big|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}$ の元 u は，擬微分作用素に対する除法の定理により

$u=S(D_1-D_3,D_2)F$ 又は，$S_0(x_3,D_2)F+S_1(x_3,D_2)(D_1-D_3)F$

と表示される。従って(*)という分解に応じて

$$\begin{cases} u|_{x_1=0} = (S_0(x_3,D_2) - S_1(x_3,D_2)D_3)F_0 \\ \qquad\qquad + S_1(x_3,D_2)F_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = (S_0(x_3,D_2) - S_1(x_3,D_2)D_3)F_1 \\ \qquad\qquad + x_3 S_1(x_3,D_2)D_2^2 F_0 \end{cases}$$

ここで、定義により $b(F_0)=0$, $b(F_1)=x_2^\lambda$

従って $\begin{cases} b(u|_{x_1=0}) = S_1(x_3,D_2)x_2^\lambda \\ b(\frac{\partial u}{\partial x_1}|_{x_1=0}) = S_0(x_3,D_2)x_2^\lambda \end{cases}$

故に、u が与えられれば (S_0, S_1) が定まり、逆に、$\tilde{S}_0, \tilde{S}_1 \in \mathcal{P}'$ が与えられれば、$\mathcal{P}x_2^\lambda \to \mathcal{M}_\lambda$ の splitting を用いて $S_0(x_3,D_2)$, $S_1(x_3,D_2)$ をそれらの上の splitting による像より得られたものとして、$u = S_0F + S_1(D_1-D_3)F$ と定めれば、所要の $u \in \mathcal{H}om(\mathcal{L}_0, \mathcal{M}_\lambda)|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}$ が得られる。 Q.E.D.

以上の考察を実領域に拡張すること、より具体的に言えば $N=\{x_1=0\}$. Yをその複素化として、S_N^*Yから出るP_0の陪特性帯の合併に台を持つ$\tilde{\mathcal{P}}$-加群$\tilde{\mathcal{M}}$を構成して $\mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{L}_0, \tilde{\mathcal{M}}) \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{C}_Y, \mathcal{C}_N)$ なる同型を構成することが我々が次にまずやらねばならぬことであろう。勿論 Nの内、$x_3 \neq 0$ なる部分については双曲型,又

は楕円型故、困難はない。しかし $x_3=0$ の近傍では二つの Lagrangean 多様体の合併上に $\tilde{\mathcal{M}}$ を作らねばならないから、ここに困難が現われる。

以上見てきたように、佐藤の作用素 P_0 に対しては、極大過剰決定系を用いての定式化が可能である。しかし、単一特性の仮定が破れる時、即ち、特性多様体 V が特異点を持つ時は、問題はかなり難しくなる。たとえば、もっとも簡単な場合として、

$\mathcal{M}=\mathcal{P}/\mathcal{J}$, $V=V_1\cup V_2$, V_1, V_2 regular. V_1 と V_2 は normal crossing, $\omega|_{V_1\cap V_2}\neq 0$, $\sigma(\mathcal{J})$ は reduced, という場合を考えてみる。この時は、たとえば、$\mathcal{J}=\mathcal{P}P$ の場合に考察を行うとして、P の低階の項が generic なら、即ち、$P=P_1P_2+Q$ ord $Q\leq$ ord P_1 + ord P_2-1, $\{\sigma(P_j)=0\}=V_j$ として、$\left(d\dfrac{\sigma(Q)}{\{\sigma(P_2),\sigma(P_1)\}}\wedge\omega\right)\Big|_{V_1\cap V_2}\neq 0$ の場合、P の標準型は判っている。（柏原・河合・大島の講演参照）たとえば $P=x_1D_1+x_2$ (near $(0;dx_2\infty)$) ととれる。あるいは更に接触変換を行って $P=(D_1-x_1D_2)(D_1+x_1D_2)+\cdots$ と考えてもよい。しかし、この時 P の Riemann 函数は、極大過剰決定系では統制できない。即ち、この種の作用素は見かけは簡単だが、本質的にはかなり超越的な難しい作用素である。ただ、極度に特殊な場合、即ち $\sigma(Q)/\{\sigma(P_2),\sigma(P_1)\}\big|_{V_1\cap V_2}$ が定数の時、のみは例外的に極大過剰決定系で統制される。

参考迄に　$P = (D_1 - x_1 D_2)(D_1 + x_1 D_2) + \gamma D_2$　$(\gamma \in \mathbb{C} - \mathbb{Z})$ に対し

初期条件
$$\begin{cases} u|_{x_1=0} = \sum a_j(x_3, \ldots, x_n)\, x_2^{-j} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = \sum b_j(x_3, \ldots, x_n)\, x_2^{-j} \end{cases}$$

を与えた時の解の具体的表示を与えておく。

$$u = \sum a_j f_1^{\frac{\gamma+1}{4} - j} f_2^{-\frac{\gamma}{4}} F\left(-j + \frac{3}{2}, \frac{\gamma}{4}, \frac{1}{2}; \frac{f_2 - f_1}{f_2}\right)$$

$$+ \sum b_j x_1 f_1^{\frac{\gamma+2}{4} - j} f_2^{-\frac{\gamma+2}{4}} F\left(-j + \frac{3}{2}, \frac{\gamma+2}{4}, \frac{3}{2}; \frac{f_2 - f_1}{f_2}\right)$$

但し，$f_1 = x_2 + \dfrac{x_1^2}{2}$，$f_2 = x_2 - \dfrac{x_1^2}{2}$，　がそれである。

尚，この表示自身は，γ が (x_1, x_2, D_1, D_2) を含まぬ 0 階の擬微分作用素であれば micro-local に 意味のある表示であることを注意しておく。