数理解析研究所講究録
第 228 巻 1975 年 31-39

Essential spectra for tensor products of linear operators

北大 理　一瀬 孝

§0.序. A, B を夫々 Banach 空間 X, Y 上の線形閉作用素とし, 各多項式 $P(\xi,\eta) = \sum c_{jk}\xi^j\eta^k$ に対応して自然に定義される, テンソル積 $X \hat{\otimes} Y$ 上の2種類の線形作用素 $\sum c_{jk} A^j \otimes B^k$ 及び ($A^j \otimes B^k$ が closable のとき, その closure を $A^j \hat{\otimes} B^k$ で表わし) $\sum c_{jk} A^j \hat{\otimes} B^k$ を考えよう.

本講演では, $X \hat{\otimes} Y$ 上のこの2種類の作用素のスペクトルの諸性質は, A, B のそれからどのような寄与を受けているかを問題にしたい. 特に, F.E. Browder, F. Wolf, M. Schechter そして T. Kato の意味の本質的スペクトル及びその補集合が, A, B のスペクトルの部分集合によってどのように表わされるかを考えたい.

簡単の為に, 以下では, X, Y は Hilbert 空間であり, 更にそれらのテンソル積 (の完備化) $X \hat{\otimes} Y$ も Hilbert 空間になっているような crossnorm に対して考え, 又, 多項式

$P(\xi,\eta)=\xi+\eta$ に対応する作用素 $A\otimes I+I\otimes B$ 及び $A\hat{\otimes}I+I\hat{\otimes}B$ に限定して話を進める．得られた結果が，多体 Schrödinger 作用素のスペクトル論に於いて，1つの基本的原理となればと思う．

§1. 定義 及び 仮定

T を稠密な定義域を持つ線形閉作用素とし，T のスペクトルを $\sigma(T)$，レゾルベント集合を $\rho(T)$ で表わす．又，T の F. E. Browder [1], F. Wolf [7], M. Schechter [6], T. Kato [4] の意味の本質的スペクトルを夫々，$\sigma_{eb}(T)$，$\sigma_{ew}(T)$，$\sigma_{em}(T)$，$\sigma_{ek}(T)$ で表わす：

$\sigma_{eb}(T)=\sigma(T)\setminus\{T$ の孤立有限次元固有値$\}$

$\sigma_{ew}(T)=T$ の Fredholm domain の補集合

$\sigma_{em}(T)=\sigma_{ew}(T)\cup\{\lambda;\ T-\lambda I$ が Fredholm で，$ind(T-\lambda I)\neq 0\}$

$\sigma_{ek}(T)=T$ の semi-Fredholm domain の補集合．

これらの本質的スペクトル及びその境界の間には，一般に次のような包含関係がある：

$$\sigma_{ek}(T)\subset\sigma_{ew}(T)\subset\sigma_{em}(T)\subset\sigma_{eb}(T)\subset\sigma(T).$$

$$\partial\sigma_{ek}(T)\supset\partial\sigma_{ew}(T)\supset\partial\sigma_{em}(T)\supset\partial\sigma_{eb}(T)$$

T が自己共役のとき，この4つの本質的スペクトルは，すべ

て一致する.

<u>定義.</u> 稠密な定義域を持つ線形閉作用素 T が, ある $0 \le \theta_T < \pi$ に対して, 条件:

$$\rho(T) \supset \complement S(\theta_T), \quad S(\theta_T) = \{\zeta ;\ |\arg \zeta| \le \theta_T\},$$

$$\|\zeta(\zeta I - T)^{-1}\| \le M_T(\theta), \quad \theta = \arg\zeta, \quad \forall \zeta \notin S(\theta_T)$$

を満していると き, $(\theta_T, M_T(\theta))$ 型であると云う.

以下では, X, Y 上に稠密な定義域を持つ線形閉作用素

$$A : D[A] \subset X \to X \quad ; \quad B : D[B] \subset Y \to Y$$

は, 夫々 $(\theta_A, M_A(\theta))$, $(\theta_B, M_B(\theta))$ 型であって, $0 \le \theta_A + \theta_B < \pi$ と仮定しよう.

この仮定の下では, $X \hat{\otimes} Y$ に於て, $A \otimes I$ 及び $I \otimes B$ は, closable であるが, 更に $A \otimes I + I \otimes B$, $A \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} B$ 共に closable になり, しかも両 closures は一致することが示される. よって, その共通の closure を $\mathbf{A}$ で表わすことにする. 更に

$$\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(A) + \sigma(B)$$

が成立する[2]. ここで及び以下でも, 複素平面の部分集合 G_A, G_B のベクトル和集合 $G_A + G_B$ は, G_A, G_B のうちの少くとも一方が空集合のとき, 空集合を意味するものとする.

§2. 主なる結果.

定理を述べる前に，A の本質的スペクトルと $A\hat{\otimes}I$ のそれとの間の関係を見ておこう：

a) $\dim Y < \infty$ のとき，

$$\sigma_{ek}(A\hat{\otimes}I) = \sigma_{ek}(A), \quad \sigma_{ew}(A\hat{\otimes}I) = \sigma_{ew}(A), \quad \sigma_{em}(A\hat{\otimes}I) = \sigma_{em}(A),$$
$$\sigma_{eb}(A\hat{\otimes}I) = \sigma_{eb}(A), \quad \sigma(A\hat{\otimes}I) = \sigma(A).$$

b) $\dim Y = \infty$ のとき，

$$\sigma_{ew}(A\hat{\otimes}I) = \sigma_{em}(A\hat{\otimes}I) = \sigma_{eb}(A\hat{\otimes}I) = \sigma(A\hat{\otimes}I) = \sigma(A),$$
$$\sigma_{ek}(A\hat{\otimes}I) = \sigma(A) \setminus \Phi_0(A).$$

但し，

$$\Phi_0(A) = \{\lambda;\ T-\lambda I \text{ is semi-Fredholm and either } \mathrm{nul}(T-\lambda I)=0,\ \mathrm{def}(T-\lambda I)>0 \text{ or } \mathrm{nul}(T-\lambda I)>0,\ \mathrm{def}(T-\lambda I)=0\}.$$

前述（§1）の仮定の下に，

<u>定理.</u>

a) $\sigma_{eb}(\mathcal{A}) = (\sigma_{eb}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{eb}(B)).$

b) $\sigma_{ew}(\mathcal{A}) = (\sigma_{ew}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{ew}(B)).$

c) $\sigma_{em}(\mathcal{A}) \subset (\sigma_{em}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{em}(B)).$

d) $\sigma_{ek}(\mathcal{A}) \supset (\sigma_{ek}(A) + (\sigma(B) \setminus \Phi_0(B))) \cup ((\sigma(A) \setminus \Phi_0(A)) + \sigma_{ek}(B)).$

系.

a) A の孤立有限次元固有値全体の集合は,

$$\sigma(A)\setminus\sigma_{eb}(A)=\{(\sigma(A)\setminus\sigma_{eb}(A))+(\sigma(B)\setminus\sigma_{eb}(B))\}$$
$$\setminus\{(\sigma_{eb}(A)+\sigma(B))\cup(\sigma(A)+\sigma_{eb}(B))\}.$$

b) A の Browder の意味の本質的スペクトルと A の Fredholm domain との共通部分は,

$$\sigma_{eb}(A)\setminus\sigma_{ew}(A)=[\{(\sigma(A)\setminus\sigma_{eb}(A))+(\sigma_{eb}(B)\setminus\sigma_{ew}(B))\}$$
$$\cup\{(\sigma_{eb}(A)\setminus\sigma_{ew}(A))+(\sigma(B)\setminus\sigma_{eb}(B))\}]$$
$$\setminus[(\sigma_{ew}(A)+\sigma(B))\cup(\sigma(A)+\sigma_{ew}(B))].$$

定理の証明について, "(左辺) ⊃ (右辺)" の証明は, 主に, I. C. Gohberg & M. G. Kreĭn 及び T. Kato の Fredholm theory, semi-Fredholm theory, perturbation theory を用いる. その際次の補題がしばしば有効である. T の approximate nullity, approximate deficiency を夫々 nul′T, def′T で表わす. $\mathcal{I}=I\hat{\otimes}I$ は, $X\hat{\otimes}Y$ の恒等作用素.

補題. a) $nul'(A-\alpha I)>0$ 及び $nul'(B-\beta I)>0$ とする. このうち一方が ∞ ならば, $nul'(\mathcal{A}-(\alpha+\beta)\mathcal{I})=\infty$.

b) $def'(A-\alpha I)>0$ 及び $def'(B-\beta I)>0$ とする. このうち一方が ∞ ならば, $def'(\mathcal{A}-(\alpha+\beta)\mathcal{I})=\infty$.

逆の"(左辺)⊂(右辺)"の証明は，$X\hat{\otimes}Y$ の，$\mathcal{A}$ に対する invariant subspaces に reduce しながら示す．その際，[5]の方法が役に立つ．

定理の a); b) をテンソル積 $X\hat{\otimes}Y$ 上の作用素 $\mathcal{A}$ の F. E. Browder, F. Wolf の意味の本質的スペクトルに対する<u>スペクトル写像定理</u>と呼ぼう．

以下で，定理の a) のみの証明を与えよう．

<u>"(左辺)⊃(右辺)"の証明.</u> $\lambda\in\sigma_{eb}(A)+\sigma(B)$, $\lambda=\alpha+\beta$, $(\alpha,\beta)\in\sigma_{eb}(A)\times\sigma(B)$，とする．$\lambda$ は，$\sigma(\mathcal{A})=\sigma(A)+\sigma(B)$ の点である．$\lambda\in\sigma_{eb}(\mathcal{A})$ を示す．今 $\lambda\notin\sigma_{eb}(\mathcal{A})$ とすると，λ は $\mathcal{A}$ の孤立有限次元固有値になるから，λ は集合 $\sigma_{eb}(A)+\sigma(B)$ の孤立点である．このとき，α，β は夫々 $\sigma_{eb}(A)$, $\sigma(B)$ の孤立点になり，従って境界点であるから，$nul'(A-\alpha I)=\infty$ $nul'(B-\beta I)>0$ を得る．補題より，$nul'(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})=\infty$ が従う．$\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}$ の値域は，閉じているから，これは $nul(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})=\infty$ を意味し，仮定に反する．

"(左辺)⊂(右辺)"の証明. $\lambda\in\sigma_{eb}(\mathcal{A})$ とする．A, B に対する条件から，適当に空でない開集合 $U_0\supset\sigma(A)$, $V_0\supset\sigma(B)$ をとり

$$|\zeta+\eta|\geq C(|\zeta|+|\eta|)\quad,\quad(\zeta,\eta)\in U_0\times V_0$$

とできる。各 $\varepsilon>0$ と $r>0$ に対して，

$$U_{\varepsilon r} = \{\zeta;\ dist(\zeta, \sigma_{eb}(A) \cap K_r) < \varepsilon\} \cup (U_0 \cap \complement K_r),$$
$$V_{\varepsilon r} = \{\zeta;\ dist(\zeta, \sigma_{eb}(B) \cap K_r) < \varepsilon\} \cup (V_0 \cap \complement K_r)$$

とおく（$K_r = \{\zeta;\ |\zeta| \leq r\}$）．固定した r に対して，ε が十分小さいとき，$U_{\varepsilon r} \subset U_0$；$V_{\varepsilon r} \subset V_0$ となることに注意する．

λ が a) の右辺に属することを示すには，すべての，十分小さな $\varepsilon > 0$ と十分大きな $r > 0$ に対して，

$$\lambda \in (U_{\varepsilon r} + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + V_{\varepsilon r})$$

を示せばよいことが分る．

有限集合 $\{\alpha_j\}_{j=1}^{p} = \sigma(A) \setminus U_{\varepsilon r}$，$\{\beta_k\}_{k=1}^{q} = \sigma(B) \setminus V_{\varepsilon r}$ に associate される有限次元 projections P, Q を考える：

$$P = (2\pi i)^{-1} \sum_{j=1}^{p} \int_{C_j} (\zeta I - A)^{-1} d\zeta, \quad Q = (2\pi i)^{-1} \sum_{k=1}^{q} \int_{D_k} (\eta I - B)^{-1} d\eta$$

（C_j, D_k は夫々，α_j, β_k を中心とする十分小さな円周）．

今 $(\zeta_0, \eta_0) \in U_0 \times V_0$ を $|\zeta_0 + \eta_0| > |\lambda| + 1$ となるように選び；$A \otimes I + I \otimes B$ の perturbed operator

$$(A \otimes I + (\zeta_0 P - AP) \otimes Q) + (I \otimes B + P \otimes (\eta_0 Q - BQ))$$

を考えると，これは $X \hat{\otimes} Y$ で closable になる．この closure を $\mathcal{B}$ で表わす．差 $\mathcal{B} - \mathcal{A}$ は，$X \hat{\otimes} Y$ 上の有界で，有限次元作用素で，しかも $\mathcal{A}$ と可換である．$\mathcal{B}$ は，$X \hat{\otimes} Y$ の 4 つの閉部分空間 $PX \otimes QY$，$PX \otimes (I-Q)Y$，$(I-P)X \otimes QY$，$(I-P)X \hat{\otimes} (I-Q)Y$ によって reduce される．又，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ との Browder の意味の

本質的スペクトルは一致する．よって

$$\begin{aligned}\sigma_{eb}(A) &= \sigma_{eb}(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{B}) \\ &= \sigma(\mathcal{B}_{PQ}) \cup \sigma(\mathcal{B}_{P,I-Q}) \cup \sigma(\mathcal{B}_{I-P,Q}) \cup \sigma(\mathcal{B}_{I-P,I-Q}) \\ &\subset \{\xi_0+\eta_0\} \cup (U_{\varepsilon r}+\sigma(B)) \cup (\sigma(A)+V_{\varepsilon r}).\end{aligned}$$

此処で，$\mathcal{B}_{PQ}$, $\mathcal{B}_{P,I-Q}$, $\mathcal{B}_{I-P,Q}$, $\mathcal{B}_{I-P,I-Q}$ は，上の４つの $X \hat{\otimes} Y$ の閉部分空間に $\mathcal{B}$ を制限したものである．これより，$\xi_0+\eta_0 \neq \lambda$ だから，$\lambda \in (U_{\varepsilon r}+\sigma(B)) \cup (\sigma(A)+V_{\varepsilon r})$ を得る．

§ 3. Remarks.

1) 系の a), b) については，$\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_{eb}(A)$ 又は $\lambda \in \sigma_{eb}(A) \setminus \sigma_{ew}(A)$ に対して，$nul\,(A-\lambda I)$, $def\,(A-\lambda I)$, 及び $ind\,(A-\lambda I)$ を A, B に関する quantities を用いて exact に表わすことができる．

2) 定理の c) では，等号は一般には成立しない．1)に述べた index を用いれば，右辺の集合の中の，$\sigma_{em}(A)$ に相当する部分を exact に決定できる．

3) 定理の d) に於ても，等号は一般には成立しない．又，$\sigma_{ek}(A)$ は，無論 b) の集合に含まれているが，d) の右辺より大きな集合 $S=(\sigma_{ek}(A)+\sigma(B)) \cup (\sigma(A)+\sigma_{ek}(B))$ に対し $\sigma_{ek}(A) \subset S$ も $\sigma_{ek}(A) \supset S$ も一般には成立しない．

References

[1] Browder,F.E., On the spectral theory of elliptic differential operators.I, Math.Ann.142(1961),22-130.

[2] Ichinose,T., Operators on tensor products of Banach spaces, Trans.Amer.Math.Soc.170(1972),197-219.

[3] ---------- , Spectral properties of tensor products of linear operators, in prep.

[4] Kato,T., Perturbation theory for linear operators, Springer 1966.

[5] Nussbaum,R.D., Spectral mapping theorems and perturbation theorems ..., Trans.Amer.Math.Soc.150(1970),445-455.

[6] Schechter,M., On the essential spectrum of an arbitrary operator.I, J.Math.Anal.Appl.13(1966),205-215.

[7] Wolf,F., On the essential spectrum of partial differential boundary problems, Commun.Pure Appl.Math.12(1959),211-228.