

$\mathbb{C}(X)$ -空間のテンソル積

都立大 理学部 佐伯貞浩

X_1, \dots, X_N を有限個の局所コンパクト Hausdorff 空間とし、 X をそれらの直積空間とする。 $\mathbb{C}(X)$ で X 上の有界連続関数全体のなす Banach 代数を表わし、 $\mathbb{C}_0(X) = \{f \in \mathbb{C}(X) : f(\infty) = 0\}$ とおく。いま projective norm (= γ -norm) に關する $\{\mathbb{C}(X_j)\}_1^N$ 及び $\{\mathbb{C}_0(X_j)\}_1^N$ の complete tensor product を考える：

$$V(X) = \mathbb{C}(X_1) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathbb{C}(X_N),$$

$$V_0(X) = \mathbb{C}_0(X_1) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathbb{C}_0(X_N).$$

従って $V(X)$ と $V_0(X)$ は semi-simple Banach 代数であり、 $V_0(X)$ の極大アイテール空間は X と同一視できる ([11])。以後では $V_0(X) \subset V(X) \subset \mathbb{C}(X)$ と見なし、又自明性を避ける為にすべての X_j は無限集合と仮定する。

V_0 -空間は抽象調和解析におけるある種の問題を考える場合に、有力な方法としてしばしば用いられる (例えば [15])。この V_0 -空間の有用性は、その \mathbb{C}_0 -空間との類似性によるものではなく非類似性によるものである。従って非類似性に

については多くの文献があるが、類似性についてはあまり多くの事が知られていない様に思われる。この小稿では、第1章でこれらの既知の結果に言及した後、第2章で V_0 -空間と C_0 -空間の類似性について述べる。

第1章. V_0 -空間と C_0 -空間の非類似性

この章では V_0 -空間についての若干の結果を証明なしに述べる。最後の定理 G 以外は第2章では用いられない。

定理 A [13]. $N \geq 2$ なら, $V_0(X)$ の作用関数は解析関数に限る。即ち区間 $[-1, 1]$ 上で定義された関数 ψ について, 次の2つの命題は同値である。

$$(a) \quad f \in V_0(X) \ \& \ f(X) \subset [-1, 1] \Rightarrow \psi \circ f \in V_0(X).$$

(b) ψ は \mathbb{C} における $[-1, 1]$ のある近傍に解析関数として拡張できる (X がコンパクトでない場合は更に $\psi(0) = 0$)。

定理 B ([5], [6], [12], [14]). 次の2命題は同値である。

(a) $V_0(X)$ のすべての閉アイデール I は, その零集合

$$Z(I) = \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in I\}$$

によって決定される。

(b) 高々1つを例外として全ての X_j は scattered である (即ち完全集合を含まない)。

定理 C ([8]). もし $N \geq 2$ であって少くも 2 つの X_i が 完全集合を含むならば, $\exists f \in V_0(X)$ s.t.

$$(\operatorname{Re} f)^{n+1}, (\operatorname{Im} f)^{n+1}, f^n \bar{f}^n \quad (n, n = 0, 1, 2, \dots)$$

で生成される $V_0(X)$ の非零イデールはすべて異なる。

さて X の部分集合 E に対し

$$V_0(E) = \{f|_E : f \in V_0(X)\} \subset C_0(E)$$

とおき, これに *quotient norm* を入れると, $V_0(E)$ は E を極大イデール空間として持つ Banach 代数になる。いま, 次の様な函数列 $\sigma = \{f_m\}_1^\infty \subset V_0(E)$ が存在する様な $f \in C_0(E)$ の全体を $\widetilde{V}_0(E)$ で表わす:

$$M_\sigma \equiv \sup_m \|f_m\|_{V_0(E)} < \infty \quad \text{かつ} \quad \lim_m \|f_m - f\|_\infty = 0.$$

すると $\widetilde{V}_0(E)$ は norm $\|f\|_{\widetilde{V}_0(E)} \equiv \inf_\sigma M_\sigma$ の下に Banach 代数となる。更に $f \notin \widetilde{V}_0(E)$ なら $\|f\|_{\widetilde{V}_0(E)} = \infty$ と定義すると, Hahn-Banach の定理より容易に分かる様に

$$\|f\|_{\widetilde{V}_0(E)} = \sup \left\{ \left| \int_E f d\mu \right| : \mu \in M(E), \|\mu\|' \leq 1 \right\}.$$

但し $\|\mu\|'$ は $V_0(E)$ 上の汎函数としての測度 μ の norm を表わす。

定理 D. (a) $V_0(E) \neq C_0(E)$ なら $\widetilde{V}_0(E) \neq V_0(E)$ であ
って, しかも $\widetilde{V}_0(E)$ は non-separable である ([16]).

(b) E が X で閉かつ開なら, imbedding $V_0(E) \hookrightarrow \widetilde{V}_0(E)$ は
等長的である ([7], [16]).

(c) $N \geq 2$ とすると, $\widetilde{V}_0(X)$ に対する作用函数は, 整函数
に限る. 従って $\widetilde{V}_0(X)$ は Banach 代数として anti-symmetric
である ([2]).

定理 E ([18]). $N \geq 2$ であって少くも 2 つの X_j が完全
集合を含むならば, $V_0(E)$ が $\widetilde{V}_0(E)$ で閉でない様なコンパクト
集合 $E \subset X$ が存在する.

これら以外の $\widetilde{V}_0(E)$ についての結果については [9] 参照.

さて G をコンパクト可換群, $A(G) = \mathfrak{M}[L^1(G)]$ を G 上の
Fourier 代数とし, 2 つの作用素

$$C(G) \xrightarrow{M} C(G \times G) \xrightarrow{P} C(G)$$

を次の様に定義する:

$$(Mf)(x, y) = f(x + y),$$

$$(Pg)(x) = \int_G g(x - y, y) dy.$$

定理 F ([3]). M は $A(G)$ から $V(G \times G)$ への等長的準同型写像であって

$$M[A(G)] = \left\{ \varphi \in V(G \times G) : \varphi(x, y) = f(x+y) \text{ for some } f \in \mathbb{C}(G) \right\}.$$

更に $P \circ M$ は $A(G)$ 上の恒等写像である。

定理 G ([10]). G を無限コンパクト可換群とすると、測度の全体 $M(G \times G)$ は $V'(G \times G)$ でデンスではない。

略証. G が無限群である事により、 $M(G)$ は $A'(G)$ でデンスではない ([1]). 定理 F より、 $A(G)$ を $V(G \times G)$ の *closed subalgebra* と見なす事が出来る。いま $\Phi \in \overline{M(G)}$ なる $\Phi \in A'(G)$ を取り、 Φ を $V'(G \times G)$ の元 $\hat{\Phi}$ に拡張する。もし $M(G \times G)$ が $V'(G \times G)$ でデンスなら、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{\mu}_\varepsilon \in M(G \times G) \text{ s.t. } \|\hat{\Phi} - \tilde{\mu}_\varepsilon\|_{V'} < \varepsilon.$$

そこで $\tilde{\mu}_\varepsilon$ の $A(G)$ 上への制限を μ_ε で表わすと、明らかに $\mu_\varepsilon \in M(G)$ であって、

$$\|\Phi - \mu_\varepsilon\|_{A'(G)} \leq \|\hat{\Phi} - \tilde{\mu}_\varepsilon\|_{V'(G \times G)} < \varepsilon.$$

ここで $\varepsilon > 0$ は任意であるから、 $\Phi \in \overline{M(G)}$ となり、これは矛盾である。 Q. E. D.

第2章. V_0 -空間と C_0 -空間の類似性

与えられた Banach 空間 B に対し, X 上の B -値有界関数の全体を $L^\infty(X; B)$ で, 連続なる $f \in L^\infty(X; B)$ の全体を $C(X; B)$ で, $f(\infty) = 0$ なる $f \in C(X; B)$ の全体を $C_0(X; B)$ で表わす. 従って

$$V_0(X) \hat{\otimes} B = L^\infty(X_1) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} L^\infty(X_N) \hat{\otimes} B$$

は $L^\infty(X; B)$ の部分空間と見なせる.

定理 1 ([6]). 自然な *imbedding*

$$V_0(X) \hat{\otimes} B \subset V_0(X) \hat{\otimes} B$$

は等長的であり, 又 $V_0(X) \hat{\otimes} B = C_0(X; B) \cap [V_0(X) \hat{\otimes} B]$.

証明は自明でない. [6] を参照.

さて $M_c(X)$ を連続な測度 $\mu \in M(X)$ の全体, $M_d(X)$ を離散的測度の全体とすると, $M(X)$ は $M(X) = M_c(X) + M_d(X)$ と分解される. 同様の分解が $V_0(X)'$ に対しても成立する.

定義. $P \in (V_0(X) \hat{\otimes} B)'$ とする.

(a) P が point-mass-like であるとは, ある $x \in X$ と $\varphi \in B'$ に対し $P = \delta_x \otimes \varphi$ なる事をいう.

(b) P が discrete であるとは, それが p.m.l. な元全体の *closed linear span* に属することをいう.

(c) P がある点 $x \in X$ で連続であるとは, $\forall \varepsilon > 0$,
 $\exists x$ の近傍 W s.t. $\forall F \in V_0(X) \hat{\otimes} B$,

$$\text{supp } F \subset W \implies |\langle F, P \rangle| \leq \varepsilon \|F\|_{V_0(X) \hat{\otimes} B}.$$

もし P が X のすべての点で連続ならば, P は (X 上で) 連続であるという.

最後に, Banach空間 A が性質 (P) を持つとは

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \forall (P_j)_1^\infty \subset A \text{ with } \|P_j\| \geq 1, \forall R > 0, \\ \exists (\alpha_j)_1^m \subset \mathbb{C} \text{ with } |\alpha_j| \leq 1 \text{ s.t.} \\ \|\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_m P_m\| > R \end{array} \right.$$

定理 2 ([10]). Banach空間 B の共役空間 B' は (P) を満すものとする. しかれば任意の $P \in (V_0(X) \hat{\otimes} B)'$ に対し

(i) 連続な P_c と discrete な P_d が一意的に存在して $P = P_c + P_d$. 更に $\|P_d\| \leq \|P\|$.

(ii) ある一意的な $\Phi \in L^\infty(X; B')$ が存在して,

$$\lim_{\mathcal{F}} \|P_d - \sum_{x \in E} \delta_x \otimes \Phi(x)\| = 0.$$

こゝに \mathcal{F} は X のすべての有限直積集合 ($E = E_1 \times \dots \times E_N$) より成る有向集合を表わす ($E < F \iff E \subset F$).

これを証明するために、自明な方法により $V_0(X) \hat{\otimes} B$ を Banach $V(X)$ -module と見なす。又 $\phi \in V(X)$ と $P \in [V_0(X) \hat{\otimes} B]'$ の積 $\phi P \in [V_0(X) \hat{\otimes} B]'$ を

$$\langle F, \phi P \rangle = \langle \phi F, P \rangle \quad \forall F \in V_0(X) \hat{\otimes} B$$

で定義する。 P の X -support とは、条件「 $F \in V_0(X) \hat{\otimes} B$ が S のある近傍で 0 となるなら $\langle F, P \rangle = 0$ 」を満たす最小の閉集合 $S = S_X(P) \subset X$ であると定義する。

補題. B を上定理の通りとし、 $P \in [V_0(X) \hat{\otimes} B]'$ と $x \in X$ を固定する。しからば、次の条件を満たす $P_x \in [V_0(X) \hat{\otimes} B]'$ が一意的に存在する: $\forall \varepsilon > 0, \exists x$ の近傍 W s.t.

$$\begin{aligned} \phi \in V(X), \text{supp } \phi \subset W, \|\phi\|_{V(X)} < \varepsilon^{-1}, \phi(x) = 1 \\ \implies \|\phi P - P_x\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

証明 のアイデアを述べる。まず自然な考え方として、誰しも「 $\forall \varepsilon > 0, \forall C > 0, \exists x$ の近傍 W s.t. $\phi_i \in V(X), \text{supp } \phi_i \subset W, \|\phi_i\|_{V(X)} < C, \phi_i(x) = 1$ なら $\|\phi_1 P - \phi_2 P\| < \varepsilon$ 」を証明しようとするであろう。これは結論的には正しいが、直接の証明はうまく行かない。

そこで $x = (x_1, \dots, x_N)$ と書いて

$$\begin{aligned} E_j &= X_1 \times \dots \times X_{j-1} \times \{x_j\} \times X_{j+1} \times \dots \times X_N, \\ E &= E_1 \cup \dots \cup E_N \quad \text{とおく.} \end{aligned}$$

そしてまず, $\forall \varepsilon > 0, \exists x$ の近傍 U_ε s.t.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi \in V(X) \ \& \ \text{supp } \phi \subset U_\varepsilon \setminus E \\ \Rightarrow \|\phi P\| \leq \varepsilon \|\phi\|_{V(X)} \end{array} \right.$$

を背理法により証明する。ここで仮定「 B' は性質 (P) を持つ」が用いられるが、証明はやゝ複雑である。

次に (1) を用いて, $\forall \varepsilon > 0, \exists x$ の近傍 W_ε s.t.

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi \in V(X), \ \text{supp } \phi \subset W_\varepsilon, \ \& \ \phi(x) = 0 \\ \Rightarrow \|\phi P\| \leq \varepsilon \|\phi\|_{V(X)} \end{array} \right.$$

を証明する。これは $N=1$ の場合は (1) より直ちに示される。一般の場合は N に関する帰納法によるが、やはり証明は *trivial* ではない。

(2) を用いると、最初に述べた命題が容易に証明され、これより直ちに補題の結論を得る。 Q. E. D.

定理 3 ([10]). もしくも一つの X_j が無限集合なら,

$$A \equiv [V_0(X) \hat{\otimes} B]'_c + [V_0(X) \hat{\otimes} B]'_d$$

が $[V_0(X) \hat{\otimes} B]'$ でデンスである為の必要十分条件は、 B' が (P) を満たす事である。

略証. 定理 2 により、必要条件のみを示せばよい。また、 $N=1$ ($X=X_1$) と仮定してよい。 B' が (P) を満たさないとすると、ある $C < \infty$ と $(\Phi_n)_1^\infty \subset B'$ に対して、

$$(1) \quad \|\Phi_k\|_{B'} \geq 1 \quad \forall k, \quad \& \quad \left\| \sum_{k=1}^m \alpha_k \Phi_k \right\|_{B'} \leq C \sup_k |\alpha_k|.$$

こゝに $m \in \mathbb{N}$ と $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$ は任意である。

仮定より可算集合 $E = \{x_k\}_1^\infty \subset X$ であって各 x_k が \bar{E} の孤立点であるようなものが存在する。そこで

$$(2) \quad P_m = \sum_{k=1}^m \delta_{x_k} \otimes \Phi_k \in [C_0(X) \hat{\otimes} B]', \quad \forall m \geq 1$$

と定義すると, (1) より $\|P_m\| \leq C$. 従って $\{P_m\}_1^\infty$ は一つの weak-* cluster point $P \in [C_0(X) \hat{\otimes} B]'$ を持つ. しかるに P は \bar{A} に属さない事が示せる. Q. E. D.

補題. $(S, \mathcal{B}, \lambda)$ を任意の測度空間, $M(S, \mathcal{B})$ を \mathcal{B} 上の複素測度全体の作る Banach 空間とする. しかるば $M(S, \mathcal{B})$ 及びすべての $L^p(S, \mathcal{B}, \lambda)$, $1 \leq p < \infty$ は (P) を満たす.

略証. $1 \leq p < \infty$ かつ $f_1, \dots, f_m \in L^p$ とする. $\Omega = \Omega_m$ で $\varepsilon_k = \pm 1$ なるすべての $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ の全体を表わし, $\phi \in \mathbb{C}(\Omega)$ の平均値を

$$\mathcal{E}(\phi) = 2^{-m} \sum_{\varepsilon} \phi(\varepsilon)$$

で定義する. するとある定数 $C_p < \infty$ に対して,

$$(1) \quad \left\{ \mathcal{E} \left| \sum_{k=1}^m \varepsilon_k f_k \right|^p \right\}^{1/p} \leq C_p \mathcal{E} \left| \sum_{k=1}^m \varepsilon_k f_k \right|$$

が成立する ([19: Chap.V, p.213]).

$1 \leq p \leq 2$ とすると, $(2/p)' = 2/(p-2)$ であるから

$$(2) \quad \sum_1^m |f_k|^p \leq m^{(2-p)/2} \left(\sum_1^m |f_k|^2 \right)^{p/2} \quad (\text{Hölder})$$

$$\text{よって} \quad m^{-(p-1)/p} \sum_1^m \|f_k\|_p \leq \left(\sum_1^m \int |f_k|^p d\lambda \right)^{1/p} \quad (")$$

$$\leq m^{(2-p)/2} \left\{ \int (\mathcal{E} | \sum_1^m \varepsilon_k f_k |^2)^{p/2} d\lambda \right\}^{1/p} \quad (2)$$

$$\leq C_2 m^{(2-p)/2} \left\{ \int (\mathcal{E} | \sum_1^m \varepsilon_k f_k |)^p d\lambda \right\}^{1/p} \quad (1)$$

$$\leq C_2 m^{(2-p)/2p} \mathcal{E} \left\| \sum_1^m \varepsilon_k f_k \right\|_p \quad (\text{Minkowski}).$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_1^m \|f_k\|_p \leq C_2 \left\| \sum_1^m \varepsilon_k f_k \right\|_p \quad (1 \leq p \leq 2)$$

が少くも1つの ε に対し成立する. 同様にして

$$\frac{1}{m^{(p-1)/p}} \sum_1^m \|f_k\|_p \leq \left\| \sum_1^m \varepsilon_k f_k \right\|_p \quad (2 \leq p < \infty).$$

従ってすべての L^p は (\mathcal{P}) を満す. $M(S, \mathcal{B})$ に対する結果は, L^1 に対する結果と Radon-Nikodym より出る.

定理4 ([10]). 次の3条件は同値である:

(a) 高々一つの X_j を除いてすべての X_j は scattered である.

(b) $M(X)$ は $V_0(X)'$ でテンソスである.

(c) $V_0(X)'$ は性質 (\mathcal{P}) を持つ.

略証. $N=1$ のときは, (c)は前補題の特別な場合であるから, 証明すべき事は何もない. $N \geq 2$ のときは, (a) \Rightarrow (b)は

定理2と前補題より, (b) \Rightarrow (a)は定理3と定理6より,
 (a) \Rightarrow (c)は定理3より出る。(c) \Rightarrow (a)の証明は容易。

系1. $\mathcal{N}(X)$ で, $\|f\|_{\mathcal{N}} = \sup_{E \in \mathfrak{A}} \|f\|_{V(E)} < \infty$ なる $f \in \mathcal{L}^\infty$
 の全体を表わす。このとき (i) $\mathcal{N}(X)$ は norm $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ の下
 に Banach代数となり, (ii)もしすべての X_j が scattered
 であるならば, $\mathcal{N}(X)$ は $V_0(X)''$ と等長的に同型となる。

系2. もしすべての X_j が離散的ならば

(i) 各 $P \in V_0(X)'$ に対し

$$\lim_{\mathfrak{A}} \left\| P - \sum_{x \in E} \langle \xi_{\{x\}}, P \rangle \delta_x \right\| = 0.$$

こゝに ξ_A は A の定義関数とする。

(ii) $V_0(X)''$ は $V_0(X)$ の multiplier 全体の作る Banach
 代数と等長的に同型である。

この系は, C_0 -空間についての次の事実の類似である:
 X を離散的空間とすると, (i) $C_0(X)' = \ell^1(X)$, かつ (ii)
 $\ell^1(X)' = \ell^\infty(X)$ は $C_0(X)$ の multiplier 全体と等長的に
 同型である。

以上の結果の詳しい証明及び抽象調和解析への応用につい
 ては, [10]を参照されたい。

引用文献

- [1] C.F. Dunkl & D.E. Ramirez, *Topics in harmonic analysis*, Appleton-Century-Crofts, N.Y., 1971.
- [3] S.C. Herz, *Remarques sur la note précédente de M. Varopoulos*, C.R. Acad. Sci. Paris, 260(1955), 6001-6004.
- [2] C. Graham, *On a Banach algebra of Varopoulos*, J. Func. Anal., 4(1969), 317-328.
- [4] J.-P. Kahane & Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris: Hermann 1963.
- [5] S. Saeki, *Spectral synthesis for the Kronecker sets*, J. M. S. Japan, 21(1969), 549-563.
- [6] —, *The ranges of certain isometries of tensor products ...*, J. M. S. Japan, 23(1971), 27-39.
- [7] —, *Homomorphisms of tensor algebras*, Tôhoku M. J., 23(1971), 173-199.
- [8] —, *Tensor products of Banach algebras and harm. anal.*, Tôhoku M. J., 24(1972), 281-299.
- [9] —, *On restriction algebras of tensor algebras*, J. M. S. Japan, 25(1973), 506-522.
- [10] —, *Tensor products of $C(X)$ -spaces and ...*, submitted to J. M. S. Japan.

- [11] J. Tomiyama, Tensor products of comm. Banach alg.,
Tôhoku M.J., 12 (1960), 147-154.
- [12] N. Th. Varopoulos, Sur les ensembles parfaits et ----,
C. R. Acad. Sci. Paris, 260 (1965), 4668-4670.
- [13] ———, *ibid.* 260 (1965), 5165-5168.
- [14] ———, *ibid.* 260 (1965), 5997-6000.
- [15] ———, Tensor algebra & harmonic analysis,
Acta M., 119 (1967), 51-112.
- [16] ———, On a problem of A. Beurling, Jour. Func.
Analy., 2 (1968), 24-30.
- [17] ———, Tensor algebras over discrete spaces,
Jour. Func. Analysis, 3 (1969), 321-335.
- [18] ———, Groups of cont. functions in harmonic
analysis, Acta Math., 125 (1970), 109-154.
- [19] A. Zygmund, Trigonometric series, Vol. I,
Cambridge University Press, 1959.

1974年 9月 27日