

無限テンソル積作用素の極分解

東工大 理 中神祥臣

§ 1. 序論. 応用上必ずしも有界でない作用素の無限テンソル積が必要となる. ここでは内作用素  $\alpha_i$  の無限テンソル積を  $\otimes^c \mathcal{H}_i$  から  $\otimes^c \mathcal{H}_i$  への内作用素として定義し, 幾つかの応用を試みる. 以下次のような記号と規約を使う.

$I$ : 添字集合 (無限) ;  $i, k \in I$

$J \subset I \iff J$  は  $I$  の有限部分集合

$\mathcal{H}_i$ :  $i$  次元でないヒルベルト空間 ;  $\xi_i, \eta_i \in I$

$\alpha_i$ : 稠密な定義域  $D(\alpha_i)$  を持つ  $\mathcal{H}_i$  上の内作用素

$M_i$ :  $\mathcal{H}_i$  上の作用素環

$S$ :  $\sum \|\xi_i\| - 1 < \infty$  なる  $(\xi_i) \in \prod \mathcal{H}_i$  全体

$S_0$ :  $0 < \prod \|\xi_i\| < \infty$  なる  $(\xi_i) \in \prod \mathcal{H}_i$  全体

$(\xi_i) \sim (\eta_i) \iff \sum |(\xi_i | \eta_i) - 1| < \infty$

$(\xi_i) \overset{w}{\sim} (\eta_i) \iff \sum \|(\xi_i | \eta_i) - 1\| < \infty$

$(\xi_i) \overset{u}{\sim} (\eta_i) \iff$  或る  $\Sigma$ -タリ-作用素  $u_i \in M_i'$  が存在して

$(\xi_i) \sim (u_i \eta_i)$

$(\xi_i) \sim_{\bar{p}} (\eta_i) \Leftrightarrow$  ある半等距離作用素  $v_i \in M_i'$  が存在して

$$(\xi_i) \sim (v_i \eta_i)$$

$(\xi_i) \sim_c (\eta_i) \Leftrightarrow$  ある  $2$ -タリ-作用素  $c_i \in M_i \cap M_i'$  が存

$$\text{在して } (\xi_i) \sim (c_i \eta_i)$$

$$C \equiv S / \sim, \quad C_0 \equiv S_0 / \sim_c \quad ; \quad c \in C \quad c_0 \in C_0$$

$C(\xi_i) \in C$  :  $(\xi_i)$  を代表元として持つもの

$C(\xi_i) \sim_c C(\eta_i) \Leftrightarrow (\xi_i) \sim_c (\eta_i)$ , ここで  $\sim$  は  $\sim, \sim_c,$

$$\sim_{\bar{p}}, \sim_{\bar{c}} \text{ または } \sim$$

$\otimes \mathcal{H}_i$  : 完全無限テンソル積

$\mathcal{H}_c \equiv \otimes^c \mathcal{H}_i \equiv \otimes (\mathcal{H}_i, \xi_i)$  : 不完全無限テンソル積

$\pi_i : x \in M_i \mapsto x \otimes 1 : \mathcal{H}_i \otimes (\otimes_{i \neq i} \mathcal{H}_i)$  上の表現

$$\otimes M_i \equiv (\bigcup \pi_i(M_i))''$$

$\otimes^c M_i \equiv \otimes (M_i, \xi_i)$  :  $\otimes M_i$  の  $\mathcal{H}_c$  への制限

$p_c : \otimes \mathcal{H}_i$  から  $\mathcal{H}_c$  への射影 ;  $p_c \in (\otimes M_i)'$

$p(c) : p_c$  の  $(\otimes M_i)'$  の中心での台

§ 2. 閉作用素の無限テンソル積  $\mathcal{H}_c$  は稠密な定義域

$D(\mathcal{A}_c)$  を持つ  $\mathcal{H}_c$  上の閉作用素とする.

定義.  $(\xi_{0c}, \eta_{0c})$  が  $(\mathcal{A}_c)$  の non-zero reference pair とは

i)  $(\xi_{0c}) \in S_0, (\eta_{0c}) \in S_0$

ii)  $\xi_{0c} \in D(\mathcal{A}_c), (\mathcal{A}_c \xi_{0c}) \in S$

$$\text{iii) } (\alpha_c \beta_{0c}) \sim (\gamma_{0c})$$

$$\text{iv) } \gamma_{0c} \in D(\alpha_c^*), (\alpha_c^* \gamma_{0c}) \in S$$

が成り立つことである。

いま定義の条件 i), ii), iii) を仮定してみる。  $\beta_c \in D(\alpha_c)$ ,  $c \in I$  かつ有限個の  $c$  を除いて  $\beta_c = \beta_{0c}$  をみたす  $\otimes \beta_c$  の全体に対し

$$\text{写像 } \otimes \beta_c \mapsto \otimes \alpha_c \beta_c \text{ は } \mathcal{H}_c, c \equiv c(\beta_{0c}) \text{ で稠密な}$$

定義域をもち,  $\mathcal{H}_c, c' \equiv c(\gamma_{0c})$  に値を取る線型写像  $\otimes (\alpha_c, \beta_c)$

へ代数的に拡張される。条件 iv) はこの  $\otimes (\alpha_c, \beta_{0c})$  が閉拡大

をもつための一つの完全条件になっている。条件 i), ii), iii)

をみたすが iv) をみたさないような  $(\beta_{0c}), (\gamma_{0c})$  の対も作る

ことができる。閉拡大が存在する場合, それを  $\otimes^{c|c} \alpha_c$  と表わす。

特に  $c' = c$  の場合には  $\otimes^c \alpha_c$  と表わす。

定理 1.  $\alpha_c$  を正値, 自己共役とする。  $(\beta_{0c}, \gamma_{0c})$  が  $(\alpha_c)$  の non-zero reference pair ならば,  $(\beta_{0c}) \sim (\gamma_{0c})$  かつ  $\otimes^c \alpha_c$  は  $\mathcal{H}_c$  上で自己共役である。

定理 2.  $\alpha_c$  の極分解を  $u_c | \alpha_c$  とすれば,  $\otimes^{c|c} \alpha_c = (\otimes^{c|c} u_c) (\otimes^c | \alpha_c)$  となり極分解になっている。

$$\text{定理 3. } (\otimes^{c|c} \alpha_c)^* = \otimes^{c|c} \alpha_c^*$$

$$\text{定理 4. } \alpha_c \eta M_c \text{ ならば } \otimes^c \alpha_c \eta \otimes^c M_c$$

### § 3. Reference Pair の存在条件.

定理5.  $\lambda_c$  を可逆, 正值, 自己共役とし,  $\gamma_c \equiv \log \lambda_c$  とする.  $e_c$  を閉区間  $[\lambda_c^{-1}, \lambda_c]$  ( $\lambda_c > 1$ ) に対応する  $\lambda_c$  のスペクトル射影とする. 次の6条件は  $c \in C$  に対し同値である:

- i)  $(\lambda_c)$  の non-zero reference pair  $(\xi_{0c}, \xi_{0c}), c = c(\xi_{0c})$  がある;
- ii) 全2の  $\lambda$  は或る  $(\xi_c) \in C$  に対し,  $(e_c \xi_c) \in S, (\lambda_c e_c \xi_c) \in S, (e_c \xi_c) \sim (\lambda_c e_c \xi_c)$ ;
- iii) 全2の  $(\xi_c) \in C$  に対し,  $(e_c \xi_c) \in S, \sum \| \gamma_c e_c \xi_c \|^2 < \infty, \sum |(\gamma_c e_c \xi_c | \xi_c)| < \infty$ ;
- iv) 或る  $(\xi_c) \in C$  に対し,  $\xi_c \in D(\gamma_c), \sum \| \gamma_c \xi_c \|^2 < \infty, \sum |(\gamma_c \xi_c | \xi_c)| < \infty$ ;
- v)  $\otimes^c \lambda_c^{it}$  は1経数ユニタリ群,  $t \in \mathbb{R}$ ;
- vi) 全2の  $\lambda$  は或る  $(\xi_c) \in C$  と全2の  $t \in \mathbb{R}$  に対し  $(\xi_c) \sim (\lambda_c^{it} \xi_c)$ .

ここで注意したいことは, これらの条件はどれも, 独立な確率変数の無限和が確率収束するため条件の言い換えになっている. とりわけ条件(iii)は Kolmogorov の3級数定理であり, 条件(iv)は確率変数の特性関数の無限積が再び特性関数になることである. さらに条件(i)の下で,  $(\gamma_c)$  は Reed が定義した意味での strong convergence vector  $\otimes \xi_{1c}, c = c(\xi_{1c})$  を持っている.

注意6.  $\lambda_c > 0$  ( $\lambda_c \in \mathbb{R}$ ) とする. 定理5で条件(i), (ii), (v)の  $x_c$  の代りに  $\lambda_c x_c$ , 条件(iii), (iv)では  $y_c$  の代りに  $y_c + \log \lambda_c$ , 条件(vii)では  $\sim$  の代りに  $\hat{\sim}$  を使うこともよい. このとき  $\log \lambda_c$  は  $y_c$  に対する繰り込み定数と解釈できる.  $\lambda_c$  を  $M_c'$  又はその中心の可逆, 正值, 自己共役な元としても条件(i) ~ (v)の間の同値性は成り立つ. そのとき(vi)の  $\hat{\sim}$  を  $\sim$ ,  $\hat{\sim}$  に代えると条件(i) ~ (v)は条件(vi)に対する十分条件になっている.  $\hat{\sim}$  については§7の定理14で触れる.

$$\text{定理7. } \otimes^c x_c * x_c = (\otimes^{c,c} x_c) * (\otimes^{c,c} x_c)$$

定理8.  $(\otimes^c x_c)^{it} = \otimes^c x_c^{it}$  特に  $(\otimes^c x_c)^2 = \otimes^c x_c^2$  が  
 全ての  $z \in \mathbb{C}$  で成り立つ.

この定理の下で次のことに注意しよう.  $y_c \equiv \log x_c$  かつ  $\pi_c^c(y_c) \equiv \pi_c(y_c) \upharpoonright H_c$  とすれば

$$\log \otimes^c x_c = \sum \pi_c^c(y_c)$$

となる. たゞし右辺は定理8の式の右辺を  $t=0$  で微分して得られる, Stieltzが定義した非有界作用素の和である.

#### §4. モジュラー作用素の無限テンソル積

左ヒルベルト環  $\mathcal{O}_c$  の完備化を  $\mathcal{H}_c$  とする.  $\mathcal{O}_c$  は規格化された元  $\xi_{0c}$  をもち  $\xi_{0c} = \xi_{0c}^2 = \xi_{0c}^\#$  をみたしているものとする

る.  $\xi_l \in \mathcal{O}_l$ ,  $l \in I$  かつ有限個の  $l$  を除いて  $\xi_l = \xi_{0l}$  なる  
 $\otimes \xi_l$  全体の線形拡大を  $\mathcal{O}(\mathcal{O}_l, \xi_{0l})$  と表わす. これには自然に  
 $\#$ -演算と積が定義できて左ヒルベルト環になる.  $\mathcal{O}_l$  上の  
 $\#$ -演算  $S_l$  と  $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}(\xi_{0l})$  に対し  $\otimes^{\mathcal{C}} \Delta_l = (\otimes^{\mathcal{C}} S_l^*)(\otimes^{\mathcal{C}} \bar{S}_l)$  が  
 $\mathcal{H}_l$  上で成り立っている. このことから直ちに

系 9.  $\omega_l \equiv \omega_{\xi_{0l}}$ ,  $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}(\xi_{0l})$  かつ  $\otimes^{\mathcal{C}} M_l$  上で  $\omega \equiv \otimes \omega_l$   
とすれば,  $\otimes^{\mathcal{C}} M_l$  上の自己同型写像  $\otimes^{\mathcal{C}} \sigma_t^{\omega}$  が定義でき,  
 $\sigma_t^{\omega} = \otimes^{\mathcal{C}} \sigma_t^{\omega_l}$  となる.

### § 5. $\sigma$ -有限測度の無限積

当節では  $I$  は可算とする.  $(\Omega_l, \mathcal{F}_l, \nu_l)$ ,  $l \in I$  を確率空間と  
する.  $(\Omega, \mathcal{F}) \equiv \prod (\Omega_l, \mathcal{F}_l)$ ,  $\nu \equiv \prod \nu_l$ ,  $\mathcal{H}_l \equiv L^2(\Omega_l, \mathcal{F}_l, \nu_l)$  かつ  
 $\mathcal{Z}_l \equiv L^{\infty}(\Omega_l, \mathcal{F}_l, \nu_l)$  とする.  $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$  は確率空間になる.  
 $\mathcal{H}_l \cap \mathcal{Z}_l$  の元  $\xi$  を  $\mathcal{Z}_l$  の元と見るときには  $\pi_l(\xi)$  と表わす.  $\eta$   
 $\in \mathcal{H}_l$  に対し  $\omega_{\eta} \in \omega_{\eta}(x) \equiv (x\eta | \eta)$ ,  $x \in \mathcal{Z}_l$  で定義する.

$\mu_l$  を  $(\Omega_l, \mathcal{F}_l)$  上で  $\nu_l$  に関して絶対連続な  $\sigma$ -有限測度と  
し,  $h_l \equiv d\mu_l/d\nu_l$  とする.  $\xi_l \in D(h_l^{1/2})$  かつ  $h_l^{1/2} \xi_l \neq 0$  に対しそ  
れぞれを規格化したものを  $\xi_{0l}, \eta_{0l}$  とすれば,  $\omega_{\eta_{0l}}$  は  $\Omega_l$  上  
で  $\nu_l$  に関して絶対連続である. そこですべて  $J \subset I$  に  
対し  $\Omega$  上の  $\sigma$ -有限測度  $M_J$  を

$$M_J \equiv \left( \otimes_J \|h_l^{1/2} \xi_l\|^2 \mu_l \right) \otimes \left( \otimes_{I \setminus J} \omega_{\eta_{0l}} \right)$$

で定義する。勿論  $\mu_j$  は  $\otimes^j M_L$ ,  $C \sim C(\gamma_{0L})$  上の半有限型で正規なトレースである。

命題 10.  $0 < \prod \|\pi(\xi_L)\| < \infty$  かつ  $\mu_L \ll \nu_L$  とする。もし  $(\gamma_{0L}, \gamma_{0L})$  が  $(\pi(\xi_L))$  の non-zero reference pair ならば

$$\mu \equiv \sup_{J \subset \mathbb{I}} \mu_J$$

は  $\Omega$  上の  $\sigma$ -有限測度である。特に  $(\gamma_L) \not\sim (\gamma_{0L})$  ならば  $\mu$  と  $\otimes \omega_{\gamma_L}$  は互に特異である。

上で定義された  $\mu$  は  $(\xi_L) \in S_0$  により定義されるので、 $\mu^{(\xi_L)}$  と表わすことにする。

定理 11.  $\nu_L, \nu, \mu_L, h_L$  を上のようにし、 $\mu_L \sim \nu_L$  (又は  $\mu_L \ll \nu_L$ ) とする。  $\xi_L \in D(h_L^{1/2})$ ,  $0 < \prod \|\pi(\xi_L)\| < \infty$  に対し  $\xi_{0L}, \gamma_{0L}$  を上のようにし、 $h_{0L} \equiv \|\xi_L\|^2 \|h_L^{1/2} \xi_L\|^{-2} h_L$  とする。  $(\gamma_{0L}, \gamma_{0L})$  が  $(\pi(\xi_L))$  の non-zero reference pair ならば、次の 3 条件は同値である:

- i)  $\mu^{(\xi_L)} \sim \nu$  (又は  $\mu^{(\xi_L)} \ll \nu$ );
- ii)  $(\xi_L) \in S$  かつ  $(\xi_L, \xi_L)$  は  $(h_{0L}^{1/2})$  の non-zero reference pair;
- iii)  $(\xi_L) \in S$  かつ  $(\xi_L) \sim (h_{0L}^{1/2} \xi_L)$ .

ここで注意すべきことは条件 (iii) は Hill の条件である。

## § 6 半有限型重みの無限テンソル積

$\xi_c \in \mathcal{H}_c$  を  $M_c$  に対し分離かつ巡回的な単位ベクトル,  $M_c$  上で  $\phi_c \equiv \omega_{\xi_c}$ ,  $h_c \in M_c$  を可逆, 正値な自己共役作用素,  $\psi_c$  を  $(M_c)_+$  上の半有限型, 忠実, 正規な重みで  $\psi_c = h_c^{1/2} \phi_c h_c^{1/2}$ ,  $\mathcal{M}_c \equiv \{x \in M_c : \psi_c(x^*x) < \infty\}$  とする.  $e_c(n)$  を閉区間  $[0, n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  に対応する  $h_c$  のスカラー射影とする.  $J_{\xi_c}, \Delta_{\xi_c}$  とそれぞれ  $\phi_c$  から導かれるモジュラー共役作用素, モジュラー作用素とする.  $x \in M_c$  に対し  $j_{\xi_c}(x) \equiv J_{\xi_c} x J_{\xi_c}$  とおく.  $x \in \mathcal{M}_c$  に対し  $x h_c^{1/2} e_c(n) \xi_c = j_{\xi_c}(h_c^{1/2} e_c(n)) x \xi_c$  となる.  $\{e_c(n+1) - e_c(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  は直交し, しかも  $\sup_n \|j_{\xi_c}(h_c^{1/2} e_c(n)) x \xi_c\|^2 \leq \psi_c(x^*x) < \infty$  であるから,  $\{x h_c^{1/2} e_c(n) \xi_c\}_{n=0}^{\infty}$  は収束列である. この極限  $j_{\xi_c}(h_c^{1/2}) x \xi_c$  を形式的に  $x h_c^{1/2} \xi_c$  と書く.  $x_{0c} \in \mathcal{M}_c, x_{0c} \neq 0$  に対し

$$\xi_{0c} \equiv \|x_{0c} \xi_c\|^{-1} x_{0c} \xi_c \quad \text{かつ} \quad \eta_{0c} \equiv \|x_{0c} h_c^{1/2} \xi_c\|^{-1} x_{0c} h_c^{1/2} \xi_c$$

とおく.  $(\otimes^c M_c)_+$ ,  $c' \sim c(\eta_{0c})$  上の半有限型, 正規な重みを

$$\psi_J \equiv (\otimes_J \|x_{0c} h_c^{1/2} \xi_c\|^{-2} \psi_c) \otimes (\otimes_{I \setminus J} \omega_{\eta_{0c}})$$

とす.

命題 12.  $0 < \prod \|x_{0c}\| < \infty$  とする. もし  $(\eta_{0c}, \gamma_{0c})$  が  $(x_{0c})$  の non-zero reference pair でしかも  $\|\Delta_{\eta_{0c}}^{-1/2} \pi_{\eta_{0c}}(x_{0c}) \Delta_{\eta_{0c}}^{1/2}\| \leq \|x_{0c}\|$  ならば

$$\psi \equiv \lim_{J \ll I} \psi_J$$

は  $(\otimes^c M_c)_+$ ,  $c' \sim c(\gamma_{0c})$  上の半有限型, 忠実, 正規な重みである.



ここで得られた  $\psi$  は  $(\lambda_{0c})$  により定義されたので,  $\psi^{(\lambda_{0c})}$  と表わすことにする. これは  $\psi_c$  の無限テンソル積の一種と解釈できる.

定理 13.  $\xi_c, \phi_c, \psi_c, h_c, \lambda_{0c}$  を上のようにする.  $C \equiv C(\xi_c)$ ,  $C \sim_p C(\gamma_{0c})$  とする.  $\otimes^c M_c$  上で  $\phi \equiv \otimes \phi_c$ ,  $\otimes^c M_c$  上で  $\psi \equiv \psi^{(\lambda_{0c})}$  とする.

(1)  $\lambda_c \equiv \|\lambda_{0c} \xi_c\| \|\lambda_{0c} h_c^{1/2} \xi_c\|^{-1}$ ,  $h_{0c} \equiv \lambda_c^2 h_c$  とする.  $\psi$  が  $\otimes^c M_c$  上の半有限型, 忠実, 正規な重みであるための十分条件は次の 3 条件のうちどれか 1 つである:

- (i)  $(\lambda_{0c} \xi_c) \in S_0$  かつ  $(\xi_{0c}) \sim_p (\gamma_{0c})$ ;
- (ii) 或る  $(\xi_{1c}) \in C$  に対し,  $(\xi_{1c}, \xi_{1c})$  は  $(h_{0c}^{1/2})$  の non-zero reference pair である;
- (iii)  $(e_c \xi_c) \in S$ ,  $(h_{0c}^{1/2} e_c \xi_c) \in S$ ,  $(e_c \xi_c) \sim (h_{0c}^{1/2} e_c \xi_c)$  なる  $h_{0c}$  のスペクトル射影  $e_c$  がある.

(2)  $\lambda_{0c}$  が  $h_c$  と可換とする. (1) のすべての条件は  $\psi$  が  $\otimes^c M_c$  上の半有限型, 忠実, 正規な重みであるための必要条件である.

## § 7. 半有限型 $\otimes^c M_c$

定理 14.  $\xi_c \in \mathcal{H}_c$  を  $M_c$  に対し分離かつ巡回的な単位ベクトル,  $C = C(\xi_c)$  とする. 次の 4 条件は同値である:

- (i)  $\otimes^{\mathbb{C}} M_L$  は半有限型 ;
- (ii)  $M_L$  上の任意な半有限型, 忠実, 正規なトレース  $\tau_L$  に対し  $(\xi_L) \sim ((d\tau_L/d\omega_{\xi_L})^{it} \xi_L)$  ( $\otimes^{\mathbb{C}} \mathcal{H}_L$  が可分なとき);
- (iii)  $\otimes^{\mathbb{C}} e_L$  が  $\otimes^{\mathbb{C}} M_L$  で 0 でなく有限型であるような  $M_L$  の射影  $e_L$  がある ;
- (iv) 或る半有限型, 忠実, 正規なトレース  $\tau_L$  が存在して  $(\xi_L) \sim ((d\tau_L/d\omega_{\xi_L})^{it} \xi_L)$ .

系 15.  $\otimes^{\mathbb{C}} \mathcal{H}_L$  は可分とする. 半有限型の  $\otimes^{\mathbb{C}} M_L$  は有限型の  $\otimes^{\mathbb{C}} (M_L)e_L$  と  $I_{\infty}$  型因子  $B(K)$  のテンソル積である :

$$\otimes^{\mathbb{C}} M_L \sim (\otimes^{\mathbb{C}} (M_L)e_L) \otimes B(K).$$

§ 8. CCR のテンソル積表現  $\mathbb{C}^I$  は複素ベクトル空間になる.  $\mathcal{H}_L$  上の可逆, 正規, 自己共役な  $\alpha_L$  に対し, 2つの試料関数空間  $V(\alpha_L, c)$  と  $V_w(\alpha_L, c)$  を考へる. 前者は  $(\alpha_L^t)$  が  $c$  に non-zero reference pair を持つような  $f \equiv (f_t) \in \mathbb{C}^I$  全体であり, 後者は或る  $(\lambda_t) \in (\mathbb{R}_+^*)^I$  が存在して  $(\lambda_t \alpha_L^t)$  が上と同様な条件をみたす  $f$  全体である.  $V(\alpha_L, c)$  は Streit の意味での試料関数空間である. 有限個の  $l$  を除いたところが 0 である  $(f_t) \in \mathbb{C}^I$  全体を  $c_0$  とする.  $U_L(s) \equiv e^{is\phi_L}$ ,  $V_L(t) \equiv e^{it\pi_L}$  ( $s, t \in \mathbb{R}$ ) を  $\mathcal{H}_L$  上で  $U_L(s)V_L(t) = e^{-ist} V_L(t)U_L(s)$  を満たす既約ユニタリ表現とし,  $s, t$  を  $\mathbb{C}$  まで許可と

に可。  $C_0$  の元  $f \equiv (f_c), g \equiv (g_c)$  に対し

$$U(f) \equiv \otimes^c U_c(f_c) \quad V(g) \equiv \otimes^c V_c(g_c)$$

と可。 (交換関係  $U(f)V(g) = e^{-i(f|g)} V(g)U(f)$  が成り立つ。

この  $U, V$  の admissible 試料関数空間を  $V_\phi(c), V_\pi(c)$  とす

る。  $V_\phi(c)$  の元  $\hat{f}$  の代表元  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  に対し, つまり, 可。  $\lambda \in \mathbb{R}$

の  $s\text{-}\lim U(\lambda f_n)$  が存在し然も  $\lambda \in \mathbb{R}$  に関し強連続

な  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0$  に対しては交換関係により  $f \equiv \sigma(C_0^*, C_0)\text{-}\lim f_n$

が存在するので,  $V_\phi(c)$  の元から  $C_0^*$  への写像  $\sigma$  が得られる。

同様のことが  $V_\pi(c)$  の元に対しても成る。

定理 16.  $f \in \sigma(V_\phi(c))$  (又は  $\sigma(V_\pi(c))$ ) であるための 1 つの完全条件は  $f \in V_w(e^{i\phi}, c)$  (又は  $V_w(e^{i\pi}, c)$ ) 。

### 引用文献

1. Elliott, G., Finite projections in Tensor product von Neumann algebras. Preprint.
2. Nakagami, Y., Infinite tensor products of operators. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 10 (1974), 111-145.
3. Reents, G., On infinite direct products of continuous unitary one-parameter groups. Preprint.