数理解析研究所講究録
第230巻 1975年 70-78

On unramified abelian extensions of local fields with abitrary residue field of characteristic $p \neq 0$ and its application to wildly ramified $\mathbb{Z}_p$-extensions

東大 理　　三木 博雄

この講演の詳細は文献[4]に述べてあるので，ここでは要点を述べることにする．

pを素数，kを標数pの任意の体を剰余体にもつ離散付値で完備な体とし，kの剰余体を$\bar{k}$，kの整数環を$\mathcal{O}_k$，$\mathcal{O}_k$の単数群をU_kとかく．

次の問題(1)(2)を考えよう．

<u>問題</u>（1）<u>kの不分岐アーベル拡大の理論をつくること</u>．

<u>問題</u>（2）<u>kの完全分岐な$\mathbb{Z}_p$-拡大の全体$\mathfrak{F}_\infty(k)$とkから構成されるある集合$W_\infty(k)$との間の1対1の対応を見い出すこと</u>．ここでK/kがガロア拡大でそのガロア群$G(K/k)$が位相群としてp進整数環$\mathbb{Z}_p$の加法群に同型であるときKはkの<u>$\mathbb{Z}_p$-拡大</u>であるとよばれている．

上の問題は伊原[1]で述べられている問題「$\mathbb{Q}(t)_p$ の類体論をつくること」を考えている過程で生じたものである．

以下問題(1)(2)について補足しよう．

問題(1)の補足． よく知られているように，k の不分岐アーベル拡大と $\bar{k}$ のアーベル拡大とは canonical に1対1に対応しているから，問題(1)は本質的には標数 p の任意の体 $\bar{k}$ の上のアーベル拡大の理論をつくることと同値である．そして $\bar{k}$ のアーベル拡大の理論については，拡大の次数が p でわれないときは Kummer theory，exponent が p のアーベル拡大については Artin-Schreier 拡大の理論，exponent が p のべきのアーベル拡大については Witt の理論([7])がよく知られている．剰余体 $\bar{k}$ へ移さずに直接 k での formulation を得たいというのが問題(1)の目標である．

問題(2)の補足． 一般の k でやらず，次の条件(i)(ii)を仮定して考える．

(i) p は k の素元である．

(ii) 有限体 $\mathbb{F}_p$ は $\bar{k}$ の maximum perfect subfield である．つまり，$\mathbb{F}_p=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bar{k})^{p^n}$．

Teichmüller [6] によれば，標数 p の任意の体 $\bar{k}$ について p を素元にもち $\bar{k}$ を剰余体にもつ離散付値で完備な体 k はただひとつ存在する．ゆえに，

$$(*) \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{k})^{p^n} = \mathbb{F}_p$$

をみたす標数pの体$\mathfrak{k}$は上の条件(i)(ii)をみたすkと$k \mapsto \bar{k}$により1対1に対応している．(*)をみたす$\mathfrak{k}$の例としては$\mathfrak{k} = \mathbb{F}_p$，$\mathbb{F}_p(t)$，$\mathbb{F}_p\{t\}$（有限体，有理函数体，形式的べき級数体）などがある．$\mathfrak{k} = \mathbb{F}_p$のときは$k = \mathbb{Q}_p$（$p$進数体），$\mathfrak{k} = \mathbb{F}_p(t)$のときは$k = \mathbb{Q}(t)_p$となる．

$k = \mathbb{Q}_p$のときは問題(2)の解答は次のとおりである．局所類体論により，$\mathbb{Q}_p$の完全分岐な$\mathbb{Z}_p$-拡大の全体$\mathfrak{I}_\infty(\mathbb{Q}_p)$と$U_p^{(1)} = \{ u \in \mathbb{Z}_p^\times \mid u \equiv 1 \pmod p \}$は次の対応で1対1に対応している：$K_\infty \longmapsto u \in U_p^{(1)}$ s.t. $pu \in \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{K_n/k}(K_n^\times)$．ただし$K_n/k$は$K_\infty/k$の$p^n$次sub-extensionである．この対応を上の(i)(ii)をみたす一般のkについて拡張したいというのが問題(2)の目標である．

以下，上の問題(1)，(2)について得られた結果を紹介しよう．

§1 不分岐アーベル拡大

以下次数mの完全分岐な巡回拡大k'/kを固定して考える．任意の有限次不分岐拡大K/kについて，

$$G^*(K) = N_{K'/K}(U_{K'}) \cap k / N_{k'/k}(U_{k'})$$

とおく．ただし $K'=Kk'$ とおいた．$G^*(K)$ は明らかに $U_k/N_{k'/k}(U_{k'})$ の部分群である．そして

$$W(k'/k)=\bigcup G^*(K)$$

とおく．ただし和はすべての有限次不分岐拡大 K/k にわたり，$U_k/N_{k'/k}(U_{k'})$ の中で和を考えている．$W(k'/k)$ も明らかに $U_k/N_{k'/k}(U_{k'})$ の部分群である．$\widetilde{W}(k'/k)$ を $W(k'/k)$ の有限部分群の全体からなる集合とし，$\mathfrak{F}_m$ を k の有限次不分岐アーベル拡大 K で $(G(K/k))^m=1$ となるものの全体とする．また群 G について G の指標群を $\chi(G)$ であらわす．以上の Notation のもとで，

Theorem A．次の (1)，(2) が成立する．

(1) $K\in\mathfrak{F}_m$ ならば，$G^*(K)$ から $\chi(G(K/k))$ の上への canonical な同型が存在する．

(2) $\mathfrak{F}_m$ と $\widetilde{W}(k'/k)$ は $K\longmapsto G^*(K)$ により bijective に対応する．さらに，$K_1, K_2\in\mathfrak{F}_m$ のとき，$K_1\subset K_2$ と $G^*(K_1)\subset G^*(K_2)$ は同値である．

次に Theorem A の意味について述べる．$m\not\equiv 0 \pmod{p}$ のとき，よく知られているように，完全分岐な m 次巡回拡大 k'/k が存在することと k が（従って $\bar{k}$ が）1 の原始 m 乗根を含むことと同値である．そしてこの場合容易に $W(k'/k)=(\bar{k})^\times/(\bar{k}^\times)^m$，$G^*(K)=(\bar{k})^\times\cap(\bar{K})^m/(\bar{k}^\times)^m$ がわかる

から，Theorem A は Kummer theory と本質的に同じである．また m が p のべきの場合は本質的には Witt の理論（[7]）と同じである．Witt の formulation は加法的であるのに対し Theorem A は乗法的である．Witt の理論における $W_n(\mathfrak{k})/\wp W_n(\mathfrak{k})$ に対応するのが $W(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k})$ である．ただし $m=p^n$ で $W_n(\mathfrak{k})$ は $\mathfrak{k}$-係数の長さ n の Witt vector のつくる環の加法群で，$\wp(x)=x^p-x$，ただし $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$x^p=(x_1^p, x_2^p, \cdots, x_n^p)$ である．また $\wp$-map と Norm map が対応している．従って Theorem A は本質的に Kummer 理論と Witt の理論を含んでいる．

また $\mathfrak{k}$ が完全体のときは $W(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k})=U_{\mathfrak{k}}/N_{\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}}(U_{\mathfrak{k}'})$ が証明できるが，Theorem A は群 $U_{\mathfrak{k}}/N_{\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}}(U_{\mathfrak{k}'})$ のひとつの意味を与えている．つまり $U_{\mathfrak{k}}/N_{\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}}(U_{\mathfrak{k}'}) \cong \chi(G(K_m/\mathfrak{k}))$．ただし K_m は $\mathfrak{F}_m$ に属する体の全体の合併体である．

$\mathfrak{k}$ が一般の場合の $W(\mathfrak{k}'/\mathfrak{k})$ の形については文献[4]の§5を参照して下さい．

§2 $\mathbb{Z}_p$-拡大への応用

問題(1)と(2)は一見無関係のように思われるが，序文の中の条件(i), (ii)のもとでは，次のTheoremにより，それらは密接に結びついている．

Theorem ([3]の主定理). kを離散付値νで完備な標数0の体で標数p($\neq 0$)の剰余体$\bar{k}$をもつとし，次の条件(イ), (ロ), (ハ)をみたす部分体k_0を含むとする．

(イ) k_0はνのk_0への制限で完備である．

(ロ) k_0の剰余体$\bar{k}_0$は$\bar{k}$のmaximum perfect sub-fieldである．つまり，$\bar{k}_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bar{k})^{p^n}$である．

(ハ) k_0の素元はkの素元である．

このときkの任意の$\mathbb{Z}_p$-拡大はk_0のある$\mathbb{Z}_p$-拡大とkのある不分岐な$\mathbb{Z}_p$-拡大との合成体に含まれる．

さて(i), (ii)の仮定のもとで問題(2)について得られた結果を述べよう．

条件(i)により，$k_n(\zeta_1) = k(\zeta_{n+1})$となる$k$の$p^n$次巡回拡大$k_n$がある．ただし$\zeta_i$は1の原始$p^i$乗根である．$k_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} k_n$とおけば，$k_\infty$は$k$の完全分岐な$\mathbb{Z}_p$-拡大である．

$$H_n(k) = \{x \in U_k \mid x \equiv a_0^{p^n} + a_1^{p^{n-1}} p + \cdots + a_n p^n \pmod{p^{n+1}}, a_i \in O_k\}$$

とおくと，これはU_kの部分群であることが証明できる．また

$N_{k_n/k}(U_{k_n})$ は $H_n(k)$ の部分群であることが証明される.

$$W_n(k) = H_n(k) / N_{k_n/k}(U_{k_n}) \qquad n = 1, 2, \cdots$$

とおくと $\{W_n(k);\ p_n^{n'}\}$ は射影系となる. ただし $n' \geq n$ について, $p_n^{n'}: W_{n'}(k) \longrightarrow W_n(k)$ は natural injection $H_{n'}(k) \rightarrow H_n(k)$ によって induce される homomorphism である. これの projective limit を $W_\infty(k)$ とする:

$$W_\infty(k) = \varprojlim W_n(k).$$

$\mathfrak{F}_\infty(k)$ は問題 (2) のとおりとする. このとき, Theorem A の応用として (他のいくつかの命題をもちいて) 次の Theorem B をえる.

Theorem B. 序文の中の条件(i), (ii)のもとで, $\mathfrak{F}_\infty(k)$ から $W_\infty(k)$ への map F を $k'_\infty \longmapsto (N_{k'_n/k}(\pi'_n)/N_{k_n/k}(\pi_n) \bmod N_{k_n/k}(U_{k_n}))$ で定義する. ただし k'_n/k は k'_∞/k の p^n 次の sub-extension で π_n, π'_n はそれぞれ k_n, k'_n の素元である. このとき F は π_n, π'_n のとり方によらず, F は $\mathfrak{F}_\infty(k)$ と $W_\infty(k)$ の間の1対1の対応を与える.

特に $k = \mathbb{Q}_p$ のときは $W_\infty(\mathbb{Q}_p) = U_p^{(1)}$ が容易にわかり, Theorem B の F は序文に述べた局所類体論による $\mathfrak{F}_\infty(\mathbb{Q}_p)$ と $U_p^{(1)}$ との対応と一致していることに注意されたい.

Corollary. Theorem B と同じ仮定のもとで, 次の(1) (2) は同値である.

(1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{k'_n/k}(k_n'^{\times})$ が k の素元を含む.

(2) $k'_\infty = k_c k$ となる $\mathbb{Q}_p$ の $\mathbb{Z}_p$-拡大 k_c が存在する. つまり k'_∞ / k は $\mathbb{Q}_p$-定数拡大である.

文　献

[1] 伊原 康隆：ある p 進完備な関数体についての問題, 数理研講究録 41, 1968, pp. 7−17.

[2] B. Dwork : Norm residue symbol in local number fields, Hamb. Abh. 22, 1958, pp. 180−190.

[3] H. Miki : On $\mathbb{Z}_p$-extensions of complete p-adic power series fields and function fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, Vol. 21, pp. 377−393.

[4] H. Miki : On unramified abelian extensions of local fields with arbitrary residue field of characteristic $p \neq 0$ and its application to wildly ramified $\mathbb{Z}_p$-extensions, J. Math. Soc. Japan に投稿中.

[5] J. P. Serre : Corps locaux (2nd edition), Hermann, Paris, 1968.

[6] O. Teichmüller, Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper,

J. Reine Angew. Math. 176, 1937, pp. 141–152.

[7] E. Witt : Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p von Grade p^n, J. Reine Angew. Math. 176, 1936, pp. 126–140.