数理解析研究所講究録
第 230 巻 1975 年 107-117

ラマヌジャンのτ-関数の類似

津田塾大学　片山孝次

周知のように，デデキントのη-関数 $\eta(z)$ は次のように定義される：

$$\eta(z) = e^{\frac{\pi i z}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i z},$$

$$z \in H \ (= \text{上半平面}) .$$

この24乗はふつう $\Delta(z)$ と書かれ，それは全モデュラー群 Γ に関して -12 次元の cusp form である．$\Delta(z)$ の q-展開

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

の係数である $\tau(n)$ はラマヌジャンの関数とよばれている．この関数 $\tau(n)$ に指標 χ を何等かの手段によりつけて，"χ-付き $\tau(n)$" とでもいったものを定義し，その性質を研究しようというのが小論の目的である．

まず，η, Δ, τ について知られていることを列挙しよう．

1. $\eta(z)$ の $\sigma \in \Gamma$ に関する変換公式は知られている。そして、$\eta(z)$ はテータ関数の1つである。また $\eta(z)$ は、Kronecker の limit formula にあらわれる。

2. $\tau(n)$ は乗法的である.

3. $\tau(n) = O\left(n^{\frac{11}{2}+\varepsilon}\right)$, $\forall \varepsilon > 0$.

4. p を素数とすれば

$$|\tau(p)| < 2p^{\frac{11}{2}}.$$

表 3. により Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$ が定義される。それはまた Euler 積展開をもつ。
(その Euler 積の因子 (p についての) を p^{-s} に関しての2次式とみたとき、その2次式はすべての p に対して虚根をもつ; これが有名なラマヌジャン予想であったが、最近 Deligne により証明された。4. と同値である。)

5. (Lehmer の問題) $\tau(n)$ は決して 0 にならない。
(この問題は未解決である。)

6. $\tau(n)$ に関して、種々の合同式が知られている。たとえば $n \equiv 1 \pmod 8$ ならば

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \mod 2^{11}.$$

ここで $\sigma_r(n) = \sum_{0<d|n} d^r$ である.

1.に関してDedekindは問題を，$\log\eta(z)$ の変換公式を求めることに転換した：

$$\log\eta(z) = \frac{\pi i z}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\log(1-q^n)$$
$$= \frac{\pi i z}{12} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(e^{-2\pi i m z}-1)}.$$

よって，結局ランベルト級数 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(e^{-2\pi i m z}-1)}$ の $\sigma\in\Gamma$ に関する変換公式を求めることになる．

（ついでに，そのランベルト級数の変換公式にあらわれる，z に関する定数項をDedekindの和とよんでいる：われわれの立場から，自然に"指標付きのDedekindの和"が考察の対象として出てくる．）

さて，われわれはこのランベルト級数に指標をつけてみようというのである．以下簡単のために，k を正の整数とし，χ を mod k の

real, primitive even character

とする．（$\chi(-1)=1$ である χ を even という．）したがって，よく知られているように，χ はクロネッカーの記号で与えられる指標である：よりくわしくいえば，$(\ )$ をクロネッカーの記号とするとき，

$k\equiv 1 \pmod 4$ で k は square-free であるか，

または $\frac{k}{4}\equiv 2,3 \pmod 4$ で $\frac{k}{4}$ は square-free

であるとき，上のような $\chi=\chi_k$ は

$$\chi_k(n)=\left(\frac{k}{n}\right)$$

として与えられる．$(k>0)$．

ランベルト級数に χ をつける方法は3通り少くとも考えられる．まず $z\in H$ に対し

$$F_1(\chi;z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m(e^{-2\pi imz}-1)}$$

と定義する．一方次の Kronecker の公式が知られている：

$$\frac{e^{2\pi iuz}}{e^{2\pi iz}-1}=\frac{1}{2\pi iz}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{e^{2\pi inu}}{z-n}+\frac{e^{-2\pi inu}}{z+n}\right\},$$

$$0<u<1,$$

$$\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi iz}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right\}.$$

(これらの公式は任意の $z\in\mathbb{C}$，$z\notin\mathbb{Z}$ に対して成り立つ．) これをランベルト級数の定義式に代入して，和変数 n に対して指標をつけたい．そこで

$$T_\chi=\sum_{h \bmod k}\chi(h)\,e^{\frac{2\pi ih}{k}}$$

とおくとき，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$T_\chi \cdot \chi(n) = \sum_{h \bmod k} \chi(h)\, e^{\frac{2\pi i n h}{k}}$$

であることに注意して，$z \in H$ に対し

$$F_2(\chi; z) = \sum_{h=0}^{k-1} \chi(h) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m \frac{h}{k} z}}{m\left(e^{-2\pi i m z} - 1\right)}$$

と定義する．そのとき，

$$F_2(\chi; z) = \sum_{h=0}^{k-1} \chi(h) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\frac{1}{-2\pi i m z} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{2\pi i n \frac{h}{k}}}{-mz-n} + \frac{e^{-2\pi i n \frac{h}{k}}}{-mz+n} \right\} \right]$$

$$= \frac{T_\chi}{-2\pi i z} \zeta(2) - \frac{T_\chi}{2\pi i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\chi(n)}{mz+n} + \frac{\chi(-n)}{mz-n} \right)$$

である．さらに m, n に同時に χ をつけて

$$F_3(\chi; z) = \sum_{h=1}^{k-1} \chi(h) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m} \frac{e^{-2\pi i m \frac{h}{k} z}}{e^{-2\pi i m z} - 1}$$

と定義する．

$s \in \mathbb{Z}$，$s \geq 1$ に対して

$$P_s(u) = -s! \sum_{n}{}' \frac{e^{2\pi i n u}}{(2\pi i n)^s}, \quad 0 \leqq u < 1,$$

とおく。ただし、$s=1$ に対しては右辺の和は、符号のことなる n についてまず和をとるものとする。$B_s(u)$ をベルヌーイ多項式とすれば、$(u, s) \neq (0, 1)$ に対して

$$B_s(u) = P_s(u)$$

である。上に述べた mod k の指標 χ に対して

$$B_{\chi,s}(u) = k^{s-1} \sum_{h=0}^{k-1} \chi(h) P_s\left(\frac{h+u}{k}\right)$$

とおく。$B_{\chi,s}(u)$ は Leopoldt の意味での、generalized Bernoulli 多項式である。

上に定義した $F_j(\chi; z)$, $j=1, 2, 3$, に対して次の反転公式、変換公式を証明することができる。

定理 1 (χ: non-principal)

(i) $$F_1(\chi; z) - T_\chi^{-1} F_2(\chi; -z^{-1}) = -\frac{1}{2} L(1.\chi) + \frac{T_\chi \pi i}{2k^2 z} B_{\chi,2}(0)$$

(ii) $$F_3(\chi; z) - F_3(\chi; -z^{-1}) = \frac{2 T_\chi \pi i}{k} \left(B_{\chi,1}(0)\right)^2$$

定理 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(k) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod k \right\} \subset \Gamma$$

とする．また　$c \neq 0$ において，

$$S_1(\chi, \sigma) = \sum_{p=0}^{k-1} \chi(p) \sum_{h=0}^{c-1} P_1\left(\frac{h}{c}\right) P_1\left(1 - \left\{\frac{p}{k} - \frac{ha}{c}\right\}\right),$$

$$S_2(\chi, \sigma) = \sum_{p=0}^{k-1} \chi(p) \sum_{h=0}^{c-1} P_1\left(\frac{p}{kc} + \frac{h}{c}\right) P_1\left(1 - \left\{-\frac{ha}{c} - \frac{pa}{kc}\right\}\right),$$

$$S_3(\chi, \sigma) = \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{k-1} \chi(p)\chi(q) \sum_{h=0}^{c-1} P_1\left(\frac{p}{kc} + \frac{h}{c}\right) P_1\left(1 - \left\{\frac{q}{k} - \frac{ah}{c} - \frac{pa}{kc}\right\}\right)$$

とおく．ここで　$\{x\} = x - [x] =$ xの小数部分　である．

(i)　$F_1(\chi; \sigma(z)) = F_1(\chi; z) + \pi i \, T_\chi^{-1} S_1(\chi, \sigma)$

(ii)　$$F_2(\chi; \sigma(z)) - \frac{\pi i}{2} \sigma(z) \frac{B_{\chi,2}(0)}{k} = F_2(\chi; \sigma(z)) - \frac{\pi i}{2} z \frac{B_{\chi,2}(0)}{k}$$
$$- \frac{\pi i}{2} \frac{a+d}{c} \frac{B_{\chi,2}(0)}{k} + \pi i \, S_2(\chi, \sigma),$$

(iii)　$F_3(\chi; \sigma(z)) = F_3(\chi; z) + \pi i \, S_3(\chi, \sigma)$．

上の定理にあらわれた　$S_j(\chi; \sigma)$, $j = 1, 2, 3$，が"χ-付きデデキントの和"というべきものである．

定理2をみればη-関数の類似として次のように"χ付きη-関数"を定義すればよいことがわかる.

$$\eta_1(\chi;z)=\prod_{h=0}^{k-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\varepsilon_k^{h}q^{n}\right)^{\chi(h)},\quad \varepsilon_k=e^{\frac{2\pi i}{k}},$$

$$\eta_2(\chi;z)=e^{\frac{\pi i B_{\chi,2}(0)}{2k}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q_k^{n}\right)^{\chi(n)},\quad q_k=e^{\frac{2\pi i z}{k}},$$

$$\eta_3(\chi;z)=\prod_{h=0}^{k-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\varepsilon_k^{h}q_k^{n}\right)^{\chi(h)\chi(n)}.$$

このとき

$$F_1(\chi;z)=-T_\chi^{-1}\log\eta_1(\chi;z),$$

$$F_2(\chi;z)-\frac{\pi i z B_{\chi,2}(0)}{2k}=-\log\eta_2(\chi;z),$$

$$F_3(\chi;z)=-T_\chi^{-1}\log\eta_3(\chi;z),$$

である.

以下 η_2 に関して述べる. $\left(e^{\frac{\pi i B_{\chi,2}(0)}{2k}z}\right)^{k'}$ が q_k の整数乗となる最小の整数を k' とする. たとえば $k=5,13,8,12$ に対して $k'=5,1,2,1$ である. このような k'

を用いて

$$\Delta_2(\chi_k; z) = \eta_2(\chi_k; z)^{k'}$$

と定義する．これが Δ-関数の類似である．以下簡単のために $q_k = \left(e^{\frac{\pi i B_{\chi,2}(0)}{2k} z}\right)^{k'}$ とする．Δ_2 の q_k-展開を

$$\Delta_2(\chi_k; z) = q_k \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_k{}^n)^{k'\chi(n)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_2(\chi_k; n)\, q_k{}^n$$

とすれば，$\tau_2(\chi_k; n) \in \mathbb{Z}$ で，これは次の漸化式により計算される；

$$\tau_2(\chi_k; n) = \frac{k'}{1-n}\Big\{\tau_2(\chi, n-1)\, a_\chi(1) + \tau_2(\chi; n-2)\, a_\chi(2)$$

$$+ \cdots + \tau_2(\chi; 1)\, a_\chi(n-1)\Big\},$$

$$a_\chi(n) = \sum_{j|n} j\chi(j).$$

この τ_2 がラマヌジャンの τ-関数の類似である．

η_2, Δ_2, τ_2 の性質について調べよう．(η, Δ, τ の

性質と平行して述べる)

(1) 変換公式についてはすでに定理1.2として与えた。$\eta_2(\chi_k; z)$ はいくつかのテータ関数の積の商として表わされる(ヤコービの3重積公式を用いて証明される。)

(2) $\tau_2(\chi_k; n)$ は乗法的ではない。

(3) $\tau_2(\chi_k; n) = O(n^{k'\varphi(k)})$ が成り立つ。

(5). Lehmerの予想になし、

$$n \equiv 4 \pmod 6 \Rightarrow \tau_2(\chi_{12}; n) = 0$$

が成り立つようである。

(6) $n \equiv 8 \pmod{12}$ ならば

$$\tau_2(\chi_{12}; n) \equiv a_{\chi_{12}}(n) \mod 2^3$$

が成り立つようである。

(7) $\tau_2(\chi_k; n)$ の符号は mod kk' に関し一定であるらしい。すなわち

$$n \equiv m \pmod{kk'} \Rightarrow \tau_2(\chi_k; n)\tau_2(\chi_k; m) \geq 0$$

となるらしい。

(5),(6),(7)については上述の τ_2 の漸化式を用いて、電子計算機により $n \leq 200$ まで τ_2 の値を求めた

結果からの推測である．(1)，(2)，(3) については [1] をみられたい．また (1) の結果を用いて，$S_2(\chi, \sigma)$ の分母を exact に定めることが出来る．

[1] K. Katayama Zeta-functions, Lambert series and arithmetic functions analogous to Ramanujan's τ-function I, Crelle 1974. Bd. 268/269.
同 II, to appear in Crelle J.