数理解析研究所講究録
第 231 巻 1975 年 12-25

多変量解析におけるある種の検定統計量の漸近展開

神大 教養　　藤越康祝

§1. 序

著者は文献 [1] において，多変量解析におけるある種の検定統計量の極限分布を調べた．この報告では，母集団固有根が重根をもつときの標本固有根の摂動公式を導びくことにより，[1] で扱った統計量の漸近展開が求まることを示す．

固有根，固有ベクトルの摂動公式を用いて，多変量解析におけるある種の統計量の分布を調べる方法は，古くは，Girshick [2]，Lawley [4]，[5] が用いており，最近では，Sugiura [8]，[9] が Taylor 展開としての摂動公式を求め，いくつかの統計量の漸近展開を求めている．その他，Izenman [3]，Okamoto & Fujikoshi [7] 等も摂動公式を用いて漸近分布を扱っている．

§2. 固有根の摂動公式

p 次の実対称行列 S が十分小なる ε ($\varepsilon > 0$) に対して、$S = \Lambda + \varepsilon V$ と変化するとき、S の固有根 $l_1, \cdots, l_p$ ($l_1 \geq \cdots \geq l_p$) の摂動を調べる．ここに、$\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p$ ．次の結果はよく知られている．

補題 1．λ_α が単根のとき，

$$(2.1) \qquad l_\alpha = \lambda_\alpha + \varepsilon v_{\alpha\alpha} + \varepsilon^2 \sum_{j \neq \alpha} \lambda_{\alpha j} v_{\alpha j} v_{j\alpha}$$

$$+ \varepsilon^3 \left\{ \sum_{j \neq \alpha} \sum_{k \neq \alpha} \lambda_{\alpha j} \lambda_{\alpha k} v_{\alpha k} v_{kj} v_{j\alpha} - v_{\alpha\alpha} \sum_{j \neq \alpha} \lambda_{\alpha j}^2 v_{\alpha j} v_{j\alpha} \right\} + O(\varepsilon^4) .$$

λ_α が重根をもつときは，l_α の展開公式は求められないが，Lawley [4] の方法を一般化して次の結果を得る．

補題 2．$\lambda_1 > \cdots > \lambda_a > \lambda_{a+1} = \cdots = \lambda_{a+b} = \lambda > \lambda_{a+b+1} > \cdots > \lambda_p$ ($0 \leq a < a+b \leq p$) とする．このとき，l_{a+j} ($j = 1, \cdots, b$) は，ε^6 の項を無視すると，

$$(2.2) \qquad Z = \lambda I + \varepsilon V_{22} - \varepsilon^2 V_{21}^* \Omega V_{12}^*$$

$$+ \varepsilon^3 \left\{ V_{21}^* \Omega V_{11}^* \Omega V_{12}^* - V_{22} V_{21}^* \Omega V_{12}^* \right\}$$

$$+ \varepsilon^4 \Big\{ - V_{21}^* \Omega V_{11}^* \Omega V_{11}^* \Omega V_{12}^* + V_{22} V_{21}^* \Omega^2 V_{11}^* \Omega V_{12}^*$$

$$+ V_{22} V_{21}^* \Omega V_{11}^* \Omega^2 V_{12}^* + V_{21}^* \Omega V_{12}^* V_{21}^* \Omega^2 V_{12}^* - V_{22}^2 V_{21}^* \Omega^2 V_{12}^* \Big\} + \varepsilon^5 M$$

の j 番目の根である．ただし，

$$\Omega = \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \lambda I)^{-1} & 0 \\ 0 & (\Lambda_3 - \lambda I)^{-1} \end{pmatrix}, \quad V_{11}^* = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{13} \\ V_{31} & V_{33} \end{pmatrix}$$

$$V_{12}^* = \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{32} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{23} & V_{33} \end{pmatrix},$$

$\Lambda_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_a)$, $\Lambda_3 = \mathrm{diag}(\lambda_{a+b+1}, \cdots, \lambda_p)$

M は省略．

§3. MANOVA における漸近展開 (Null case)

多変量線型モデル，$\underset{N\times p}{Y^*} = \underset{N\times s}{A} \underset{s\times p}{\Xi} + \underset{N\times p}{E^*}$ のもとで，パラメーターの線型集合の次元に関する検定問題

$$H_{01} : r(\underset{b\times s}{B}\Xi) = k, \quad H_{11} : r(B\Xi) > k$$

に対する代表的検定統計量

(i) 尤度比統計量；　$\Lambda_k = \prod_{\alpha=k+1}^{p} (1 + d_\alpha)^{-\frac{n}{2}}$,

(ii) Hotelling 統計量；　$T_k = \sum_{\alpha=k+1}^{p} d_\alpha$,

(iii) Pillai 統計量；　$V_k = \sum_{\alpha=k+1}^{p} d_\alpha / (1 + d_\alpha)$

の漸近展開を求める．ここに，$d_1, \cdots, d_p$ ($d_1 \geq \cdots \geq d_p$) は $S_h S_e^{-1}$ の固有根，S_e, S_h はそれぞれ誤差，仮説による平方和・積和行列である．上記統計量の分布を扱うとき，

$$S_e \sim W_p(I, n), \quad S_h \sim W_p(I, b, \Omega) \qquad (b \geq p)$$

としてよい．$n = N - s$，Ω は対角行列．Ω は n に関係しているが，

$$\Omega = n\Theta = n\,\mathrm{diag}(\theta_1, \cdots, \theta_p) \qquad \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_p$$

とおく．

$$\frac{1}{n} S_e = I + \frac{1}{\sqrt{n}} V ,$$

(3.1)

$$\frac{1}{n} S_h = \frac{1}{n} W + \frac{1}{\sqrt{n}} U + \Theta$$

とおくとき，$W = XX'$，$U = XL + LX'$，$X : p \times b$ の各要素は互に独立に $N[0,1]$ に従う，$L = [\Theta^{\frac{1}{2}}, 0]$ としてよい．(3.1) より，

$$(3.2)\quad S_h S_e^{-1} = \Theta + \frac{1}{\sqrt{n}} Y$$
$$= \Theta + \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ Y^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{n}} Y^{(2)} + \frac{1}{n} Y^{(3)} + \cdots \right\}$$

と表わせる．ここに，

$$Y^{(1)} = U - \Theta V, \quad Y^{(2)} = W - Y^{(1)} V, \quad Y^{(3)} = -Y^{(2)} V,$$
$$Y^{(4)} = Y^{(2)} V^2, \quad \cdots$$

この節では，仮説；

$$\theta_1 > \cdots > \theta_k > \theta_{k+1} = \cdots = \theta_p = 0$$

のもとで，$n \to \infty$ のときの分布を調べる．補題２より，$d_{k+1}, \cdots, d_p$ は

$$(3.3)\quad Z = \frac{1}{n} Z^{(2)} + \frac{1}{n\sqrt{n}} Z^{(3)} + \frac{1}{n^2} Z^{(4)} + \frac{1}{n^2\sqrt{n}} Z^{(5)} + O(n^{-3})$$

の固有根として与えられる．ここに，

$$Z^{(2)} = X_{22} X_{22}',$$

$$Z^{(3)} = -\left\{ X_{22} X_{12}' \Theta_1^{-\frac{1}{2}} X_{21}' + X_{21} \Theta_1^{-\frac{1}{2}} X_{12} X_{22}' + X_{22} X_{22}' V_{22} \right\},$$

$$Z^{(4)} = X_{21} \Theta_1^{-\frac{1}{2}} X_{12} \left(X_{21} \Theta_1^{-\frac{1}{2}} X_{12} \right)' + X_{22} X_{12}' \Theta_1^{-\frac{1}{2}} X_{11}' \Theta_1^{-\frac{1}{2}} X_{21}'$$
$$+ \left(X_{22} X_{12}' \Theta_1^{-\frac{1}{2}} X_{11}' \Theta_1^{-\frac{1}{2}} X_{21} \right)' - X_{22} X_{12}' \Theta^{-1} X_{12} X_{22}'$$
$$- X_{22} X_{22}' X_{21} \Theta_1^{-1} X_{21}' + X_{22} X_{22}' V_{22}^2$$

.

$+\{ X$について3次, Vについて1次の同次多項式$\}$,

$$X = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{array} \right] & \begin{array}{l} k \\ p-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} k & q-k \end{array} & \end{array}, \quad \Theta_1 = \mathrm{diag}(\theta_1, \cdots, \theta_k), \quad \Theta_2 = \mathrm{diag}(\theta_{k+1}, \cdots, \theta_p)$$

従って,

$$(3.4) \quad -2\log \Lambda_k = \mathrm{tr}\, Z^{(2)} + \frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{tr}\, Z^{(3)} + \frac{1}{n}\left(\mathrm{tr}\, Z^{(4)} - \frac{1}{2} \mathrm{tr}\, Z^{(2)^2} \right) + O(n^{-\frac{3}{2}})$$

と表わせ, その特性関数は

$$(3.5) \quad E\left[e^{it\,\mathrm{tr}\, Z^{(2)}} \left\{ 1 + \frac{it}{\sqrt{n}} \mathrm{tr}\, Z^{(3)} + \frac{it}{n}\left(\mathrm{tr}\, Z^{(4)} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, Z^{(2)^2} + \frac{it}{2}(\mathrm{tr}\, Z^{(3)})^2 \right) \right\} \right] + O(n^{-\frac{3}{2}})$$

$$= (1-2it)^{-\frac{f}{2}} \left[1 + \frac{c_1}{n}\left\{ (1-2it)^{-1} - 1 \right\} + O(n^{-\frac{3}{2}}) \right]$$

となる. ここに,

$$f = (p-k)(q-k), \quad c_1 = -\frac{f}{2}\left\{ \frac{1}{2}(q-p-1) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\theta_j} \right\}$$

反転することにより,

定理 3.1. $\theta_1, \cdots, \theta_k$ はすべて単根とする. 仮説のもと

で次の漸近展開が成立する．

(3.6) $$P(-2\log\Lambda_k \le x) = P(\chi^2_f \le x) + \frac{c_1}{n}\left[P(\chi^2_{f+2} \le x) - P(\chi^2_f \le x)\right] + O(n^{-\frac{3}{2}}),$$

(3.7) $$P(-2\rho_1 \log\Lambda_k \le x) = P(\chi^2_f \le x) + O(n^{-\frac{3}{2}}),$$

$$n\rho_1 = n + \frac{1}{2}(q-p-1) + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\theta_j}.$$

同様な方法で，T_k, V_k の漸近展開が求まる．

定理 3.2．$\theta_1, \cdots, \theta_k$ はすべて単根とする．仮説のもとで次の漸近展開が成立する．

(3.8) $$\begin{aligned} P(n\rho_2 T_k \le x) &= P(\chi^2_f \le x) \\ &\quad + \frac{f}{4n}(p+q+1-2k)\{P(\chi^2_{f+4} \le x) \\ &\quad - 2P(\chi^2_{f+2} \le x) + P(\chi^2_f \le x)\} + O(n^{-\frac{3}{2}}), \end{aligned}$$

(3.9) $$\begin{aligned} P(n\rho_3 V_k \le x) &= P(\chi^2_f \le x) \\ &\quad - \frac{f}{4n}(p+q+1-2k)\{P(\chi^2_{f+4} \le x) \\ &\quad - 2P(\chi^2_{f+2} \le x) + P(\chi^2_f \le x)\} + O(n^{-\frac{3}{2}}), \end{aligned}$$

ただし，

$$n\rho_2 = n - p - 1 + k + \sum_{j=1}^{k} 1/\theta_j \quad ,$$

$$n\rho_3 = n + q - k + \sum_{j=1}^{k} 1/\theta_j$$

修正項 ρ_2，ρ_3 は $E[n\rho_2 T_k] = f + O(n^{-\frac{3}{2}})$，$E[n\rho_3 V_k] = f + O(n^{-\frac{3}{2}})$ となるように定めている．

§4．MANOVA における漸近展開（Nonnull case）

$\theta_{k+1}, \cdots, \theta_p$ はすべて単根で0でないとする．このとき，補題1，および，(3.2) から，d_α ($\alpha = k+1, \cdots, p$) に対する摂動公式

(4.1) $$d_\alpha = \theta_\alpha + \frac{1}{\sqrt{n}} d_\alpha^{(1)} + \frac{1}{n} d_\alpha^{(2)} + \cdots$$

が成立する．ここに，

$$d_\alpha^{(1)} = 2\sqrt{\theta_\alpha}\, x_{\alpha\alpha} - \theta_\alpha v_{\alpha\alpha} \quad ,$$

$$d_\alpha^{(2)} = w_{\alpha\alpha} - \sum_{j=1}^{p} (\sqrt{\theta_j}\, x_{\alpha j} + \sqrt{\theta_\alpha}\, x_{j\alpha} - \theta_\alpha v_{\alpha j}) v_{j\alpha}$$
$$+ \sum_{j \neq \alpha} \frac{1}{\theta_\alpha - \theta_j} (\sqrt{\theta_j}\, x_{\alpha j} + \sqrt{\theta_\alpha}\, x_{j\alpha} - \theta_\alpha v_{\alpha j})(\sqrt{\theta_\alpha}\, x_{j\alpha} + \sqrt{\theta_j}\, x_{\alpha j} - \theta_j v_{j\alpha})$$

これより，$[-2\log\Lambda_k - n\log|I+\Theta_2|]/\sqrt{n}$ の特性関数は

$$(4.2)\quad E\Big[\exp\{it[\sum_\alpha \frac{2\sqrt{\theta_\alpha}}{1+\theta_\alpha}x_{\alpha\alpha} - \sum_\alpha \frac{\theta_\alpha}{1+\theta_\alpha}v_{\alpha\alpha}]\}$$

$$\times\{1 + \frac{it}{\sqrt{n}}(\sum_\alpha \frac{d_\alpha^{(2)}}{1+\theta_\alpha} - \frac{1}{2}\sum_\alpha(\frac{d_\alpha^{(1)}}{1+\theta_\alpha})^2) + O_p(\frac{1}{n})\Big]$$

と表わせる．V に関する平均は微分作用素を用いて漸近的に求められる（Sugiura [8]）．(4.2) は

$$e^{\frac{(it)^2}{2}\tau_1^2}\ [\ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\{it\,h_{11} + (it)^3 h_{31}\} + O(n^{-1})\ ]$$

となる．ここに，

$$\tau_1^2 = 2\sum_{\alpha=k+1}^{p}[1 - \frac{1}{(1+\theta_\alpha)^2}],\quad s_j = \sum_{\alpha=k+1}^{p}(\frac{\theta_\alpha}{1+\theta_\alpha})^j$$

$$h_{11} = k(p-k) + (p-k-1)s_1 + s_2 + \sum_{\alpha=k+1}^{p}\sum_{j\neq\alpha}\frac{\theta_\alpha+\theta_j+\theta_\alpha\theta_j}{(1+\theta_\alpha)(\theta_\alpha-\theta_j)},$$

$$h_{31} = 4s_1 - 8s_2 + \frac{20}{3}s_3 - 2s_4$$

反転することにより次の結果をうる．

定理 4.1. $\theta_{k+1},\cdots,\theta_p$ がすべて単根であるとき，次の漸近展開が成立する．

$$(4.3)\quad P(\frac{1}{\sqrt{n}\,\tau_1}\{-2\log\Lambda_k - n\log|I+\Theta_2|\} \le x) = \Phi(x)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{ h_{11}\Phi^{(1)}(x)/\tau_1 + h_{31}\Phi^{(3)}(x)/\tau_1^3 \right\} + O(n^{-1}) .$$

$\Phi^{(j)}(x)$ は $N[0,1]$ の分布関数の j 回微分.

同様にして次の定理をうる.

定理 4.2. $\theta_{k+1}, \cdots, \theta_p$ が全て単根のとき, 次の漸近展開が成立する.

(4.4)
$$P\left(\frac{1}{\sqrt{n}\,\tau_2}\left(nT_k - n\,\mathrm{tr}\,\Theta_2\right) \leq x\right) = \Phi(x)$$
$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{ h_{12}\Phi^{(1)}(x)/\tau_2 + h_{32}\Phi^{(3)}(x)/\tau_2^3 \right\} + O(n^{-1}),$$

(4.5)
$$P\left(\frac{1}{\sqrt{n}\,\tau_3}\left(nV_k - n\,\mathrm{tr}\,\Theta_2(I+\Theta_2)^{-1}\right) \leq x\right) = \Phi(x)$$
$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{ h_{13}\Phi^{(1)}(x)/\tau_3 + h_{33}\Phi^{(3)}(x)/\tau_3^3 \right\} + O(n^{-1})$$

ただし,

$$\tau_2^2 = 2(2t_1 + t_2), \quad t_j = \sum_{\alpha=k+1}^{p} \theta_\alpha^{j},$$

$$h_{12} = 6(p-k) + (p+1)t_1 + \sum_{\alpha=k+1}^{p}\sum_{j\neq\alpha} \frac{\theta_\alpha + \theta_j + \theta_\alpha\theta_j}{\theta_\alpha - \theta_j},$$

$$h_{32} = 4t_1 + 8t_2 + \frac{8}{3}t_3,$$

$$\tau_3 = 2(\gamma_2 - \gamma_4) \quad , \quad \gamma_j = \sum_{\alpha=k+1}^{p} 1/(1+\theta_\alpha)^j$$

$$h_{13} = (p-1)\gamma_1 + (b-p-1)\gamma_2 + 2\gamma_3 - \sum_{\alpha=k+1}^{p}\sum_{j\neq\alpha} \frac{\theta_j + \theta_\alpha + \theta_j\theta_\alpha}{(1+\theta_\alpha)^2(\theta_\alpha - \theta_j)} \, .$$

$$h_{33} = 4\sum_{\alpha=k+1}^{p} \frac{\theta_\alpha}{(1+\theta_\alpha)^4}\left\{ 1 - \frac{4\theta_\alpha}{1+\theta_\alpha} + \frac{11}{3}\left(\frac{\theta_\alpha}{1+\theta_\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\theta_\alpha}{1+\theta_\alpha}\right)^3 \right\}$$

§5. 共分散行列の固有根に関する検定

nS は Wishart 分布 $W_p(\Sigma, n)$ に従うとする．S, Σ の固有根をそれぞれ $l_1, \cdots, l_p$ $(l_1 \geq \cdots \geq l_p)$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ $(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0)$ とする．仮説検定問題

$$H_{02} : \lambda_{a+1} = \cdots = \lambda_{a+b} = \lambda \quad , \quad H_{12} \neq H_{02}$$

$$(\; 0 \leq a < a+b \leq p \;)$$

に対する尤度比にもとづく検定統計量は，

λ が既知のとき，

$$L_1 = \left\{ \prod_{j=a+1}^{a+b} \frac{l_j}{\lambda} \right\}^{\frac{n}{2}} \exp\left\{ -\frac{n}{2\lambda}\sum_{j=a+1}^{a+b} l_j + \frac{n}{2}b \right\} ,$$

λ が未知のとき，

$$L_2 = \left[\prod_{j=a+1}^{a+b} l_j \Big/ \left\{ \frac{1}{b}\sum_{j=a+1}^{a+b} l_j \right\}^{b} \right]^{\frac{n}{2}}$$

である．ここでは，仮説；

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_a > \lambda_{a+1} = \cdots = \lambda_{a+b} > \lambda_{a+b+1} > \cdots > \lambda_p$$

のもとでの $-2\log L_1$, $-2\log L_2$ の漸近展開を求める．一般性を失うことなく，$\Sigma = \mathrm{diag}(\lambda_1/\lambda, \cdots, \lambda_a/\lambda, 1, \cdots, 1, \lambda_{a+b+1}/\lambda, \cdots, \lambda_p/\lambda)$ としてよい．

$$S = \Sigma + \frac{1}{\sqrt{n}} V$$

とおく．補題2より，$-2\log L_1$ の特性関数は次のように表わせる．

$$(5.1) \quad E\Big[\, e^{\frac{it}{2}\mathrm{tr} V_{22}^2} \Big\{ 1 + \frac{it}{\sqrt{n}} q_1 + \frac{it}{n} q_2 + \frac{(it)^2}{2n} q_1^2 + O_p(n^{-\frac{3}{2}}) \Big\} \Big] ,$$

$$q_1 = -\mathrm{tr}\, V_{22} V_{21}^* \Omega V_{12}^* - \frac{1}{3} \mathrm{tr}\, V_{22}^3 ,$$

$$\begin{aligned} q_2 = {} & \mathrm{tr}\, V_{22} V_{21}^* \Omega V_{11}^* \Omega V_{12}^* - \mathrm{tr}\, V_{22}^2 V_{21}^* \Omega^2 V_{12}^* \\ & + \frac{1}{2} \mathrm{tr}\,(V_{21}^* \Omega V_{12}^*)^2 + \mathrm{tr}\, V_{22}^2 V_{21}^* \Omega V_{12}^* + \frac{1}{4} \mathrm{tr}\, V_{22}^4 , \end{aligned}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - I)^{-1} & 0 \\ 0 & (\Lambda_3 - I)^{-1} \end{pmatrix} , \quad \begin{aligned} &\Lambda_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1/\lambda, \cdots, \lambda_a/\lambda) , \\ &\Lambda_2 = \mathrm{diag}(\lambda_{a+b+1}/\lambda, \cdots, \lambda_p/\lambda) \end{aligned}$$

平均は

$$n\tilde{S} = n \begin{pmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{21} & \tilde{S}_{22} \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \Omega^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \Omega^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} V_{11}^* & V_{12}^* \\ V_{21}^* & V_{22} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \Omega^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

が $W_p(I, n)$ に従うことを用いる．このとき，(i) $n\tilde{S}_{11\cdot 2} = n[\tilde{S}_{11} - \tilde{S}_{12}\tilde{S}_{22}^{-1}\tilde{S}_{21}] \sim W_{p-b}(I, n-b)$，(ii) $\sqrt{n}\,\tilde{S}_{12}\tilde{S}_{22}^{-\frac{1}{2}}$ の各要素は互に独立に $N[0,1]$ に従う，(iii) $n\tilde{S}_{22} \sim W_b(I, n)$，(iv) これらの統計量は互に独立である．$\tilde{S}_{22}$ に関する平均は $\sqrt{\frac{n}{2}}\log \tilde{S}_{22} = Y$ なる変換を行う．変換の Jacobian は Nagao [6] によって求められている．$-2\log L_2$ の分布も同様に扱うことができる．最終的には次の結果をうる．

定理 5.1．λ_j，$j=1,\cdots,a$，$a+b+1,\cdots,p$ がすべて単根とする．仮説のもとで次の漸近展開が成立する．

$$(5.2)\quad P(-2\log L_i \le x) = P(\chi^2_{f_i} \le x) + \frac{c_{3+i}}{n}[P(\chi^2_{f_i+2} \le x) - P(\chi^2_{f_i} \le x)] + O(n^{-\frac{3}{2}}),$$

$$(5.3)\quad P(-2\rho_{3+i}\log L_i \le x) = P(\chi^2_{f_i} \le x) + O(n^{-\frac{3}{2}}),$$

$$i = 1, 2$$

$$f_1 = \frac{1}{2}b(b+1), \quad f_2 = \frac{1}{2}(b-1)(b+2)$$

$$c_4 = \frac{1}{4}b(b+1)\left\{2\sum_{(\beta)}\frac{\lambda_\beta}{\lambda_\beta-\lambda} - \sum_{(\beta)}\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_\beta-\lambda}\right)^2\right\} + \frac{b}{4}\left(\sum_{(\beta)}\frac{\lambda_\beta}{\lambda_\beta-\lambda}\right)^2 + \frac{b}{24}\{(b+1)(2b+1)-2\},$$

$$C_5 = \frac{1}{4}(b-1)(b+2)\left\{ p - b + \frac{1}{6b}(2b^2+b+2) - \sum_{(\beta)}\left(\frac{\lambda}{\lambda_\beta - \lambda}\right)^2 \right\}$$

$$n(\rho_{3+i} - 1) = -2\, C_{3+i} / f_i$$

$\sum_{(\beta)}$ は $\beta = 1, \cdots, a, a+b+1, \cdots, p$ についての和を意味する.

References

(1) Fujikoshi, Y. (1972). Asymptotic distributions of some test statistics in multivariate analysis. Report No.167 Res. Math. Sci., Kyoto Univ.

(2) Girshic, M. A. (1939). On the sampling theory of roots of determinantal equations. Ann. Math. Statist. 10 203-224.

(3) Izenman, A. J. (1974). Reduced -rank regression for the multivariate linear model. Technical Report No.9 Dept. of Statistics, Tel Aviv Univ.

(4) Lawley, D. N. (1956). Tests of significance for the latent roots of covariance and correlation matrices. Biometrika 43 128-136.

(5) Lawley, D. N. (1959). Tests of sigificance in canonical analysis. Biometrika 46 59-66.

(6) Nagao. H. (1973). On some test criteria for covariance matrix. Ann. Statist. 1 700-709.

(7) Okamoto, M. and Fujikoshi, Y. (1974). Perturbation of a matrix function and its application to multivariate analysis.(Submitted).

(8) Sugiura, N. (1973). Derivatives of the characteristic roots of a symmetric or a Hermitian matrix with two applications in multivariate analysis. Comm. in Statist. 1 393-417.

(9) Sugiura, N. (1974). Asymptotic non-null distributions of the likelihood ratio criteria for the equality of several characteristic roots of a Wishart matrix. To be appeared in Statistical Papers in Honor of Jungiro Ogawa.