数理解析研究所講究録
第231巻 1975年 78-87

ON GENERALIZED COEFFICIENT OF DETERMINATION

柳井晴夫（東大医）

§1 はじめに

電子計算機の飛躍的な発展によって，政治学，経済学，社会学，心理学，医学などのいわゆる行動科学（behavioral Science）と呼ばれる分野において，多変量解析の各種の技法を用いた人間の様々な行動現象に対する計量的な分析が数多く実施されるようになってきた。

ところで，周知のように多変量解析の手法には因子分析，重回帰分析，正準相関分析，判別分析，数量化理論など数多くあるが（Anderson (1958)，林他 (1970)，奥野他 (1971)，竹内・柳井 (1972)），これらの手法はいずれも異った研究者によって開発されたもので，統一的立場にたって，これらの手法の相互関連を明らかにしたものは見当らない。そこで，筆者は多変量解析の幾つかの手法を，線型空間からその空間に含まれる部分空間への射影子という観点から記述的（descriptive）に統一する立場にたって，二組の変数群の最大の関連の程度を示す一般化決定係数という新しい概念を導入し，多変量解析の各種の技

法のうち特に外的基準のある場合の技法の相互関連を明らかにすることを試みる。(竹内，柳井(1972)，柳井(1974))

§2 射影子についての性質

N次元実ベクトル空間 V_N に含まれるp個の1次独立なベクトル集合 $f_1, f_2, \cdots f_p$ を (N, p)型行列

(1) $$F=(f_1, f_2, \cdots, f_p)$$

によって表わし，これらのp個のベクトルによって生成される部分空間を V_F, V_N における V_F の直交補空間を $V_F^{\perp}$ とすれば，V_F, $V_F^{\perp}$ 上への射影子 Π_F, $\Pi_F^{\perp}$ は次のように表わされる。

(2) $$\Pi_F = F(F'F)^{-}F' \qquad \Pi_F^{\perp} = I_N - \Pi_F$$

(ただし − は $AA^{-}A=A$ かつ $(A^{-})'=A^{-}$ を満たす一般化逆行列)

ここで，V_N に含まれるもう一つの部分空間をq個のベクトル集合 $G=(g_1, g_2, \cdots, g_q)$ で生成される V_G, その空間への射影子を Π_G とするとき，次の6つの関係が成立する。

(3) $$V_F \perp V_G \Leftrightarrow \Pi_F\Pi_G = \Pi_G\Pi_F = O$$

(4) $$V_F \supset V_G \Leftrightarrow \Pi_F\Pi_G = \Pi_G\Pi_F = \Pi_G$$

(5) $$\|\Pi_F y\|^2 \leqq \|y\|^2 \quad \text{for any} \quad y \in V_N$$

(6) $$\Pi_{F\cup G} = (F,\ G)\begin{pmatrix} F'F & F'G \\ G'F & G'G \end{pmatrix}^{-}\begin{pmatrix} F' \\ G' \end{pmatrix}$$

$$= \Pi_F + \Pi_{G/F} \qquad \left(\text{ただし } \Pi_{G/F} = \Pi_F^{\perp}G(G'\Pi_F^{\perp}G)^{-}G'\Pi_F^{\perp}\right.$$

または $$= \Pi_G + \Pi_{F/G} \qquad \left.\Pi_{F/G} = \Pi_G^{\perp}F(F'\Pi_G^{\perp}F)^{-}F'\Pi_G^{\perp}\right)$$

(証明 竹内柳井(1972) p28)

(7) $\overline{W}_F \supset \overline{W}_G$ のとき $\Pi_{F\cup G} = \Pi_F$ ((1)と一般化逆行列の定義より)

(8) $\overline{W}_F \supset \overline{W}_G$ で $\dim(\overline{W}_{F|G}) = \dim \overline{W}_F - \dim \overline{W}_G = r$ で $\mathrm{rank}(\Pi_{\bar{G}} \tilde{F})$ $= r$ となるような (N, r) 型行列を $\tilde{F}$ とするとき,

$$\Pi_F = \Pi_G + \Pi_{\bar{G}} \tilde{F} (\tilde{F}' \Pi_{\bar{G}} \tilde{F})^{-} \tilde{F}' \Pi_{\bar{G}}$$

上記の性質を用いて、次に一般化決定係数の基本となる定理を示そう。(柳井(1978))

定理1 $d^2_{F\cdot G} = \mathrm{tr}(\Pi_F \Pi_G) \leqq r$

ただし $r = \mathrm{Min}(\mathrm{rank}\,\Pi_F, \mathrm{rank}\,\Pi_G) = \mathrm{Min}(p, q)$

(証明) $y = \Pi_G x$ とおいて (5) を用いると $\|\Pi_F \Pi_G x\|^2 \leqq \|\Pi_G x\|^2$ これより $x'(\Pi_G \Pi_F \Pi_G - \Pi_G)x \leqq 0$ x は任意の N 次元ベクトルであるから $-(\Pi_G \Pi_F \Pi_G - \Pi_G) = \Pi_G - \Pi_G \Pi_F \Pi_G$ は非負定値行列となる。したがって $\mathrm{tr}(\Pi_G) \geqq \mathrm{tr}(\Pi_G \Pi_F \Pi_G) = \mathrm{tr}(\Pi_G \Pi_F)$ 同様にして $\mathrm{tr}(\Pi_F) \geqq \mathrm{tr}(\Pi_G \Pi_F)$ さらに $\mathrm{rank}\,\Pi_F = \mathrm{tr}(\Pi_F)$ より定理が証明される。 (証明終)

この定理で $F = (f)$, $G = (g)$ とおくと これは Schwarz の不等式に一致することから、上記の定理は Schwarz の不等式を多次元の場合に一般化したものになっていることがわかる。

§3 一般化決定係数による多変量解析の各種技法の統一的表現

二組の変数群の測定値を $F = (f_{ij})$, $G = (g_{ij})$ と表わ

した場合、各列ベクトルに含まれる成分の和が0になるように変換するには、ベクトル $1_N' = (\overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{N\text{個の}1})$ で生成される部分空間 V_M への射影子を $\Pi_M = 1_N(1_N'1_N)^{-1}1_N' = \frac{1}{N}1_N1_N'$、その直交補空間 $V_M^\perp$ への射影子を $\Pi_M^\perp = I_N - \Pi_M$ と定義したとき、

(9) $\tilde{F} = \Pi_M^\perp F \qquad \tilde{G} = \Pi_M^\perp G$

と基準化すればよい。このとき、

(10) $D^2_{F \cdot G} = d^2_{\tilde{F} \cdot \tilde{G}} / r$

と定義すると定理1より $0 \leqq D^2_{F \cdot G} \leqq 1$ となる。ここで(10)式は F と G に含まれる二組の変数群全体の相互関連の強さを示す指標となるもので、一般化決定係数(generalized coefficient of determination)と呼ぶ。(柳井(1994))

多変量解析の各種の技法は F, G に含まれる変数が(a)間隔尺度か名義尺度か(b)変数の個数が二つ以上であるか一つであるか、という二つの組み合わせによって分類することが可能である。(表参照)

3.1 <u>ともに間隔尺度の場合</u>

ベクトルは変数が一つで、行列は二つ以上の変数があることを意味するものである。一例として、重相関係数の平方は、

$$R^2_{x \cdot y} = tr(\Pi_X \Pi_y) = tr(\Pi_X y(y'y)^{-1}y') = y'\Pi_X y(y'y)^{-1}$$
$$= \|\Pi_X y\|^2 / \|y\|^2 = C_{yx} C_{xx}^{-1} C_{xy} / s_y^2 = R_{yx} R_{xx}^{-1} R_{xy}$$

と表現される。

3.2 一方が名義尺度の場合

N人の被験者がm個の水準をもつ因子Aによって割りつけられているとき $G_A = (g_1, g_2, \cdots, g_m)$ の成分がすべて1か0で $\|g_i\|^2 = (g_i, g_i) = N_i$, $(g_i, g_j) = 0\ (i \neq j)$ さらに

(11) $G_A \mathbf{1}_m = \mathbf{1}_N$

の性質を満たすとき G_A はダミー変数行列と呼ばれる。G_A を(9)式によって $\tilde{G}_A = \Pi_M^{\perp} G_A$ と基準化すると $\mathrm{rank}\, \tilde{G}_A = \mathrm{rank}\, G_A - 1$ となるので, G_A から任意に1つの列ベクトルを取り除いた行列を G_{A^*} とすると, $\tilde{G}_{A^*}$ と $\tilde{G}_A$ は同一の部分空間 $W_{A/M} (= W_A \cap W_M^{\perp})$ を生成する。そして, $W_{A/M}$ への射影子は(8)の性質から

(12) $\Pi_{\tilde{A}} = \Pi_{A/M} = \Pi_{A \cup M} - \Pi_M = \Pi_A - \Pi_M = \Pi_M^{\perp} \Pi_A = \Pi_A \Pi_M^{\perp}$

となる。さらに、次の関係式も成立する。

(13) $\sum_i \mathrm{tr}(\Pi_{\tilde{g}_i} \Pi_X) = \frac{1}{N} \sum_{i,j} \mathrm{tr}(\Pi_{\tilde{h}_{ij}} \Pi_X) = \mathrm{tr}(C_{XX}^{-1} C_A)$

3.3 ともに名義尺度の場合

(12)の関係式を用いると, クロス集計における一般化決定係数は

$$D_{A \cdot B}^2 = \mathrm{tr}(\Pi_{\tilde{A}} \Pi_{\tilde{B}})/r = \mathrm{tr}(\Pi_A \Pi_M^{\perp} \Pi_B \Pi_M^{\perp})/r = \mathrm{tr}(SS')/r$$

となる。(ただし $S = (G_A' G_A)^{-\frac{1}{2}} (G_A' \Pi_M^{\perp} G_B)(G_B' G_B)^{-\frac{1}{2}}$)

ここで $s_{ij} = (N_{ij} - \frac{1}{N} N_{i\cdot} N_{\cdot j}) / \sqrt{N_{i\cdot} N_{\cdot j}}$ より $\mathrm{tr}(SS')/r$ が分割表の検定におけるカイ二乗統計量のNr分の一になる。

3.4 第三の変数群の影響を取り除く場合

x, y より z の影響を取り除いた $x_z = \Pi_z^{\perp} x$, $y_z = \Pi_z^{\perp} y$ の一

一般化決定係数 $tr(\Pi_{x|z}\Pi_{y|z})$ が偏相関係数の平方に等しくなることが次のようにして証明される。

$$tr(\Pi_{x|z}\Pi_{y|z}) = tr\left(\Pi_{\bar z}x(x'\Pi_{\bar z}x)^{-1}x'\Pi_{\bar z}y(y'\Pi_{\bar z}y)^{-1}y'\Pi_{\bar z}\right)$$

$$= (x'\Pi_{\bar z}y)^2/\{(x'\Pi_{\bar z}x)(y'\Pi_{\bar z}y)\} = \left(s_{xy} - \frac{s_{xz}s_{yz}}{s_z^2}\right)^2\Big/\left\{\left(s_x^2 - \frac{s_{xz}^2}{s_z^2}\right)\left(s_y^2 - \frac{s_{yz}^2}{s_z^2}\right)\right\} = (r_{xy} - r_{xz}r_{yz})^2/\{(1-r_{xz}^2)(1-r_{yz}^2)\}$$

さらに、偏正準相関分析における X, Y, Z を名義尺度のダミー変数 G_A, G_B, G_C におきかえると

(14) $$D^2_{AB|C} = tr(\Pi_{\tilde A|C}\Pi_{\tilde B|C})/r = tr(\Pi_{A|C}\Pi_{B|C})/r$$

$$= tr\{(\tilde G_A'\Pi_{\bar C}\tilde G_A)^{-1}(\tilde G_A'\Pi_{\bar C}\tilde G_B)(\tilde G_B'\Pi_{\bar C}\tilde G_B)^{-1}(\tilde G_B'\Pi_{\bar C}\tilde G_A)\}/r$$

$$= tr(S_{11}^{-1}S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})/r.$$

ただし $S_{11} = (a_{ij})$　$S_{12} = (b_{ij})$　$S_{22} = (c_{ij})$

$$a_{ij} = \delta_{ij}N_{i..} - \sum_{k=1}^{m_C}\frac{N_{i.k}N_{j.k}}{N_{..k}} \quad (1 \le i \le m_A-1,\ 1 \le j \le m_A-1)$$

$$b_{ij} = N_{ij.} - \sum_{k=1}^{m_C}\frac{N_{i.k}N_{.jk}}{N_{..k}} \quad \begin{pmatrix}1 \le i \le m_A-1\\ 1 \le j \le m_B-1\end{pmatrix} \quad c_{ij} = \delta_{ij}N_{.i.} - \sum_{k=1}^{m_C}\frac{N_{.ik}N_{.jk}}{N_{..k}}$$

(ただし $N_{i..}$, $N_{.j.}$, $N_{..k}$ は A, B, C の第 i, j, k カテゴリーの反応頻度、$N_{i.k}$, $N_{.jk}$ は A の第 i, C の第 k, B の第 j, C の第 k カテゴリーの同時反応頻度)

なお、$m_A = m_B = m_C = 2$ のとき (14) は A, B, C の各カテゴリー間の四分点相関係数を φ_{AB}, φ_{BC}, φ_{AC} とすると、次のように偏相関係数の公式に一致する。

(15) $$D^2_{AB|C} = \frac{(\varphi_{AB} - \varphi_{AC}\varphi_{BC})^2}{(1-\varphi_{AC}^2)(1-\varphi_{BC}^2)}$$

§4 一般化決定係数の応用

4.1 判別分析における決定係数とマハラノビスの汎距離

判別すべき群が二つで、二群の母共分散行列が等しいと仮定できる場合、尤度比によるFisherの判別関数が導びかれるが、この方法は記述的には一群に $-\frac{N_2}{N_1+N_2}$、二群に $\frac{+N_1}{N_1+N_2}$ を基準変数の測定値として与えれば、重回帰分析に形式的に完全に一致する。ここで、上記の場合に得られる一般化決定係数は $D_c^2 = tr(\Pi_{\hat{x}_{12}}\Pi_x) = \frac{N_1N_2}{N^2}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)'C_{xx}^{-1}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)$ となる。なお、二群間のマハラノビスの汎距離の推定値は $D_M^2 = (\bar{x}_1-\bar{x}_2)'C_{eA}^{-1}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\times\frac{N_1+N_2-2}{N}$ となるから、D_c^2 と D_M^2 の間には次の関係が成立する。(C_{eA}は級内共分散行列)

(16)　$$D_M^2 = \frac{D_c^2(N_1+N_2-2)}{(1-D_c^2)N}$$

(証明) 重判別分析における行列方程式を $C_A a = \lambda C_{xx} a$ とおくと、群が二つの場合 $C_A = \frac{N_1N_2}{N^2}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)(\bar{x}_1-\bar{x}_2)'$ となる。したがって

$\lambda = tr(C_{xx}^{-1}C_A) = D_c^2$ —①　一方 $C_{xx} = C_A + C_{eA}$ より

$C_A a = \frac{\lambda}{1-\lambda}C_{eA}a$ —②　これより $\frac{\lambda}{1-\lambda} = tr(C_{eA}^{-1}C_A) = D_M^2\times\frac{N}{N_1+N_2-2}$

①と②より (16) が導びかれる。(証明終)

上記の関係式より、一般化決定係数 D_c^2 を用いることによって、判別分析における変数選択は重回帰分析における変数選択と全く同様に、しかも同一のプログラムを用いて行なうことが可能である。

(例) $N_1=N_2=50$　$D_M^2=7.24$ (理論的正誤率 91.1%) のとき $D_c=0.803$

$D_M^2=6.67$ (〃 90.1%) のとき $D_c=0.791$

4.2 変数選択と一般化決定係数

Yを基準変数，説明変数$\mathbf{x}$が $X=(X_1, X_2)$ と分離されるとき，

$$d^2_{X\cdot Y}=tr(\Pi_X\Pi_Y)=tr\{(\Pi_{X_1}+\Pi_{X_2/X_1})\Pi_Y\}=tr(\Pi_{X_1}\Pi_Y)+tr(\Pi_{X_2/X_1}\Pi_Y)$$
$$=d^2_{X_1\cdot Y}+d^2_{X_2/X_1\cdot Y}$$

となる。ここで上式の第二項は，X_1に対してX_2を追加したことによって増加する決定係数の増分を示すもので，この値が大きくなるような変数を選択すればよい。ここで，$Y=(y)$，または $Y=(\hat{h}_{12})$ のとき次式が得られる。

(17) $d^2_{X_2/X_1\cdot y}=(C_{yX_2}-C_{yX_1}C_{X_1X_1}^{-1}C_{X_1X_2})(C_{X_2X_2}-C_{X_2X_1}C_{X_1X_1}^{-1}C_{X_1X_2})^{-1}(C_{X_2y}-C_{X_2X_1}C_{X_1X_1}^{-1}C_{X_1y})/\sigma_y^2$

(18) $d^2_{X_2/X_1\cdot\hat{h}_{12}}=(m_{1\cdot X_2/X_1}-m_{2\cdot X_2/X_1})'(C_{X_2X_2}-C_{X_2X_1}C_{X_1X_1}^{-1}C_{X_1X_2})^{-1}(m_{1\cdot X_2/X_1}-m_{2\cdot X_2/X_1})$

ただし　$m_{j\cdot X_2/X_1}=\bar{x}_{2j}-C_{X_2X_1}C_{X_1X_1}^{-1}\bar{x}_{1j}$

4.3　多変量解析の各種技法の極値条件

$r^2_{xy}=tr(\Pi_X\Pi_y)$ と表わされることから，　$f_X=X\mathbf{w}$，$f_Y=Y\mathbf{v}$ とおくことによって，$tr(\Pi_{f_X}\Pi_{f_Y})\to max$ として正準相関分析の固有方程式を導くことができる。この他，$F_X=XW$，$G_Y=YV$ と重みベクトルを多次元に拡張することによって，次のような極値条件を導くことができる。

(a) 重回帰分析　$tr(\Pi_{F_X}\Pi_y)$　　(b) 主成分分析　$tr(X'\Pi_{F_X}X)$

(c) 変形主成分分析　$tr(Y'\Pi_{F_X}Y)$　　(d) 重判別分析　$tr(\Pi_{F_X}\Pi_A)$

(e) 正準相関分析　$tr(\Pi_{F_X}\Pi_{G_Y})$　または　$tr(\Pi_{F_X}\Pi_Y)$

(f) 一般正準相関分析　$tr(\Pi_{F_X}\Pi_{G_Y})+tr(\Pi_{F_X}\Pi_{H_Z})+tr(\Pi_{G_Y}\Pi_{H_Z})$

(一般正準相関分析は変数群が三つ以上の場合に一般化される)

表 一般化決定係数による多変量解析各種技法の分類

	分析手法	説明変数 名義	説明変数 間隔	基準変数 名義	基準変数 間隔	一般化決定係数(寄与率)	
尺度がともに間隔の場合	単回帰分析	/	x (注1)	/	y	$tr(\Pi_x \Pi_y) = r^2_{x \cdot y}$	単相関係数
	重回帰分析	/	X	/	y	$tr(\Pi_X \Pi_y) = R^2_{X \cdot y}$	重相関係数
	正準相関分析	/	X	/	Y	$tr(\Pi_X \Pi_Y)/r = R^2_{X \cdot Y}$	正準相関係数
一方が名義尺度の場合	分散分析	$\tilde{G}_{\tilde{A}}$	/	/	y	$tr(\Pi_{\tilde{A}} \Pi_y) = s^2_{y \cdot A}/s^2_y$	相関比
	共分散分析	$\tilde{G}_{\tilde{A}}$	X	/	y	$tr(\Pi_{\tilde{A} \cup X} \Pi_y)$	正準相関比
	判別分析(1)	/	X	$\tilde{g}_i$	/	$tr(\Pi_{\tilde{g}_i} \Pi_X) = \frac{N_i}{N - N_i}(\bar{X}_i - \bar{X})' C^{-1}_{XX} (\bar{X}_i - \bar{X})$	
	判別分析(2)	/	X	$\tilde{h}_{ij}$ (注2)	/	$tr(\Pi_{\tilde{h}_{ij}} \Pi_X) = \frac{N_i N_j}{N(N_i + N_j)}(\bar{X}_i - \bar{X}_j)' C^{-1}_{XX} (\bar{X}_i - \bar{X}_j)$	
	重判別分析	/	X	$\tilde{G}_{\tilde{A}}$	/	$tr(\Pi_X \Pi_{\tilde{A}})/r = tr(C^{-1}_{XX} C_A)/r$ 注4)	
	数量化一類	$\tilde{G}_{(m)}$ (注3)	/	/	y	$tr(\Pi_{\tilde{G}(m)} \Pi_y)$	相関比
尺度がともに名義の場合	数量化二類	$\tilde{G}_{(m)}$	/	$\tilde{G}_{\tilde{A}}$	/	$tr(\Pi_{\tilde{G}(m)} \Pi_{\tilde{A}})/r$	相関比
	クロス集計	$\tilde{G}_{\tilde{A}}$	/	$\tilde{G}_{\tilde{B}}$	/	$tr(\Pi_{\tilde{A}} \Pi_{\tilde{B}})/r = \chi^2_{A \cdot B}/Nr$	(カイ二乗統計量)
	数量化三類 (カテゴリカル主成分分析)(注5)	$\tilde{G}_{1(m)}$	/	$\tilde{G}_{2(m)}$	/	$tr(\Pi_{\tilde{G}_1} \Pi_{\tilde{G}_2})/r$	(〃)
第三の変数の影響を取り除く場合	偏相関分析	/	$\Pi^{\perp}_z x$	/	$\Pi^{\perp}_z y$	$tr(\Pi_{x/z} \Pi_{y/z})$	偏相関係数
	偏正準相関分析	/	$\Pi^{\perp}_z X$	/	$\Pi^{\perp}_z Y$	$tr(\Pi_{X/z} \Pi_{Y/z})/r$	偏正準相関係数
	偏クロス集計	$\Pi^{\perp}_C \tilde{G}_{\tilde{A}}$	/	$\Pi^{\perp}_C \tilde{G}_{\tilde{B}}$	/	$tr(\Pi_{\tilde{A}/C} \Pi_{\tilde{B}/C})/r$	偏関連係数

注1) x, y は全ての成分の平均が0になるように基準化されている。

注2) $h_{ij} = g_i/N_i - g_j/N_j$ $\tilde{h}_{ij} = \Pi^{\perp}_M h_{ij}$

注3) $G_{(m)} = (G_1, G_2, \cdots, G_m)$ G_j はいずれもダミー変数行列

注4) $C_{XX} = \frac{1}{N} X'X$ (共分散行列) $C_A = \frac{1}{N} X' \Pi_A X$ (級間共分散行列)

注5) Okamoto & Endo (1973) による。

§5　一般化決定係数の分布

二変数群X，Yが共分散行列 $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{pmatrix}$ をもつ正規集団からの標本であるとき，$\Sigma_{XY}=0$ の場合の標本正準相関係数の分布は次式となる。（Xがp個，Yがq個の変数を含み $q \leq p$）

$$(19)\quad f(r_1^2, r_2^2, \cdots r_q^2) = \frac{\pi^{q/2}\prod_{i=1}^{q}\Gamma\left(\frac{1}{2}(N-i+1)\right)}{\prod_{i=1}^{q}\Gamma\left(\frac{1}{2}(N-p-i+1)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(q-i+1)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(p-i+1)\right)} \times \prod_{i=1}^{q} r_i^{(p-q-1)}(1-r_i^2)^{\frac{N-p-q-1}{2}} \prod_{i<j}(r_i^2 - r_j^2)$$

定理2　$t(q, N) = r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_q^2$ とおくと，$N \to \infty$ のとき，tは自由度pqのカイ二乗分布にしたがう。

（略証1）$N \to \infty$ のとき (19) は $\Sigma = I_q$ をもつ標本共分散行列の固有値の分布に一致し，さらにこの分布における固有値の和がカイ二乗分布にしたがう。

（略証2）$t(q, N)$ の標本分布の特性関数は

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \sum_{(k)} \frac{(p)_k}{(N-q)_k} C_k(I_q)$$

となり，この分布の漸近分布 $(N \to \infty)$ は自由度pqのカイ二乗分布の特性関数となる。

（Pillai (1956)，James (1964)，Sugiura-Fujikoshi (1968) を参照）

上記の定理は3.3に対応するもので，分布論的にも一般化決定係数 $t(q, N)$ の分布の特別な場合として，相関比，重相関係数の標本分布を取扱うことができる。

REFERENCE

Pillai, K.C.S. (1956) Some results useful in multivariate analysis A.M.S. 27

Anderson,T (1958) Introduction to Multivariate Analysis

James, A.T. (1964) Distribution of matrix variates and latent roots derived from normal samples, A.M.S. 35 , 475-501

Sugiura, N & Fujikoshi, Y (1968) Asymptotic expansions of the non-null distributions of the liklifood ratio criteria for multivariate linear hyposesis and independence, z A.M.S. 40, 942-952

林知己夫他 (1970) 統計数理と情報処理 産業図書

奥野忠一他 (1971) 多変量解析法 日科技連

竹内啓，柳井晴夫 (1972) 多変量解析の基礎 東洋経済

Okamoto,M & Endo,H (1973) Basic Properties of categorical canonical correration analysis, J. of Japan Statis. Soc.

柳井晴夫 (1978) 一般化決定係数による多変量解析各種手法の統一的表現 行動計量学 [illegible]