数理解析研究所講究録
第 232 巻 1975 年 15-25

可換バナッハ環の陰関数定理

茨城大 理　　林 実樹広

本講では，Arens-Calderón ([2]) による1個の陰関数と1個の未知関数の場合の陰関数定理を一般化し，t 個の陰関数と s 個の未知関数 ($t \geq s$) の場合を考える．証明の方法は Gamelin の本[3]にあるものに従っているが，$t > s$ のときには trivial ではない．

<u>記号の定義</u>　A は単位元をもつ可換バナッハ環，M_A によりその maximal ideal space を表わす．A の元 $f_1, \cdots, f_m$ に対して，$\mathbb{C}^{s+m}$ の compact set $\sigma(h_1, \cdots, h_s, f_1, \cdots, f_m)$ を

$$\sigma(h_1, \cdots, h_s, f_1, \cdots, f_m) = \{(h_1(x), \cdots, h_s(x), f_1(x), \cdots, f_m(x)) : x \in M_A\}$$

により定義し，joint spectrum という．

[定理] ([5])　$h_1, \cdots, h_s$ を M_A 上の複素数値連続関数とする．A の元 $f_1, \cdots, f_m$ 及び，joint spectrum $\sigma(h_1, \cdots, h_s, f_1, \cdots, f_m)$ の近傍で正則な t 個 ($t \geq s$) の関数 $G_k(z_1, \cdots, z_{s+n})$ ($k = 1, \cdots, t$) が存在して，

(1) $G_k(h_1,\cdots,h_s,\hat{f}_1,\cdots,\hat{f}_n)=0$ on M_A for all $k=1,\cdots,t$

が成立しているものとする．このとき，もしJacobi行列 $\dfrac{\partial(G_1,\cdots,G_t)}{\partial(z_1,\cdots,z_s)}$ のrankが $\sigma(h_1,\cdots,h_s,f_1,\cdots,f_n)$ 上で s となっていれば，$h_1,\cdots,h_s$ はAの元のGelfand変換となっている．すなわち，Aの元 $g_1,\cdots,g_s$ で

(2) $\hat{g}_1=h_1,\ \ldots,\ \hat{g}_s=h_s$

となっているものがある．この仮定に加えて，Jacobi行列 $\dfrac{\partial(G_1,\cdots,G_t)}{\partial(z_1,\cdots,z_{s+n})}$ のrankが $\sigma(h_1,\cdots,h_s,f_1,\cdots,f_n)$ のある近傍上でも s になっていれば，$g_1,\cdots,g_s$ はfunctional calculusの意味で

(3) $G_k(g_1,\cdots,g_s,f_1,\cdots,f_n)=0$ for all $k=1,\cdots,t$

を満足するように取ることが出来る．更に，もし(2)及び(3)をみたすAの元 $g_1,\cdots,g_s$ が存在することがわかっているときは，オ1の仮定のもとで，それらは一意である．

以下，定理の証明を述べる．まず次の補題が必要である．

<u>補題1</u> (Allan[1], c.f.[6], Th.8A) $f_1,\cdots,f_n$ をAの元とする．Vが $\mathbb{C}^n$ のあるopen set Dにおけるsubvarietyで $\sigma(f_1,\cdots,f_n)\subseteq V$ となるものであれば，V上の任意の正則関数Fに対して，

Aの元fがあって，$\hat{f} = F(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n)$ となる.

証明 Arens-Calderónの補題により，Aの元$f_{n+1}, \dots, f_m$を取って，$\pi(\hat{\sigma}(f_1, \dots, f_m)) \subseteq D$ とできる；ただし，$\hat{\sigma}(\cdot)$は$\sigma(\cdot)$のpolynomial convex hullを表わし，$\pi(z_1, \dots, z_n, \dots, z_m) = (z_1, \dots, z_n)$とする．$\hat{\sigma}(f_1, \dots, f_m)$を含むpolynomial convex open set P^mを取って$\pi(P^m) \subseteq D$とすれば，$V' = P^m \cap (V \times \mathbb{C}^{m-n})$は$P^m$のsub-varietyで，$\sigma(f_1, \dots, f_m)$を含んでいる．よく知られた定理により$V'$上の正則関数$F \circ \pi$は$P^m$上の正則関数$F'$に延長できる．そこで，$f = F'(f_1, \dots, f_m)$とすると，$\hat{f} = F'(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m) = F(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n)$ //

補題2 (c.f. [3] Chap III, Th. 6.1の証明)　$h_1, \dots, h_s$をM_A上の連続関数とする．Aの元$f_1, \dots, f_n$及びM_Aのopen covering $\{U\}$があって，$x, y \in U$ かつ $f_i(x) = f_i(y)$ for all $i = 1, \dots, n$ ならば $h_j(x) = h_j(y)$, $i = 1, \dots, s$ とする．このとき，Aの元$f_{n+1}, \dots, f_m$が存在して，$x, y \in M_A$ に対して $f_i(x) = f_i(y)$ for all $i = 1, \dots, m$ ならば $h_j(x) = h_j(y)$, $j = 1, \dots, s$ となる．

証明 $M_A \times M_A$の対角集合をΔとする．$W = \bigcup_{U \in \{U\}} U \times U$ はΔを含んでいるから，$(x, y) \in M_A \times M_A \setminus W$ ならば，Aの元fがあって$f(x) \neq f(y)$．よって，x, yの小さな近傍U_x, U_yを取って，$x' \in U_x$, $y' \in U_y$ ならば$f(x') \neq f(y')$となるようにできる．$M_A \times M_A \setminus W$はコンパクトであるから，有限被覆$U_{x_1} \times U_{y_1}$,

$\dots, U_{x_l}\times U_{y_l}$ が取れる．そうすると，U_{x_i}, U_{y_i} を作くるのに使ったAの元 f_{m+i}, $i=1,\dots,l$ が求めるものとなる．

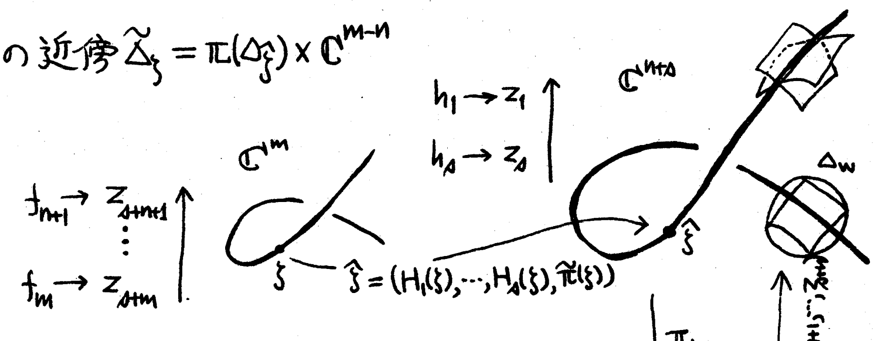
<u>存在の証明</u>： 点 $w\in\sigma(h_1,\dots,h_s,f_1,\dots,f_n)$ に対して，仮定により添字 $k_1,\dots,k_s$ があって $\det\frac{\partial(G_{k_1},\dots,G_{k_s})}{\partial(z_1,\dots,z_s)}(w)\neq 0$ となる．$\pi(z_1,\dots,z_{s+n})=(z_{s+1},\dots,z_{s+n})$ とすると，正則関数の陰関数定理により，w の近傍 $\Delta_w\ (\subseteq\mathbb{C}^{s+n})$ 及び $\pi(\Delta_w)\ (\subseteq\mathbb{C}^n)$ 上で定義された正則関数 $H_1^w,\dots,H_s^w$ があって

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{l}(z_1,\dots,z_{s+n})\in\Delta_w \text{ かつ } G_{k_l}(z_1,\dots,z_s,z_{s+1},\dots,z_{s+n})=0,\\ \hfill l=1,\dots,s\\ \quad\text{iff}\\ (z_1,\dots,z_s)\in\pi(\Delta_w) \text{ かつ } z_j=H_j^w(z_{s+1},\dots,z_{s+n}),\ j=1,\dots,s\end{array}\right.$$

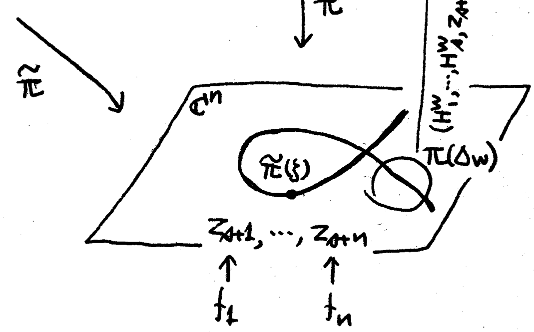
となる．よって式(1)から，$(h_1(x),\dots,h_s(x),\hat f_1(x),\dots,\hat f_n(x))\in\Delta_w$ となるような $x\in M_A$ に対しては，$h_j(x)=H_j^w(\hat f_1(x),\dots,\hat f_n(x))$ となる．従って $U^{(w)}=(h_1,\dots,h_s,\hat f_1,\dots,\hat f_n)^{-1}(\Delta_w)$ は M_A の open cover, また $U^{(w)}$ 上では h_j は $\hat f_1,\dots,\hat f_n$ の値によって決まる．従って，補題2により，Aの元 $f_{n+1},\dots,f_m$ をみつけて，h_j は M_A 上 $\hat f_1,\dots,\hat f_n$ の値によって決まるように出来る．よって $\sigma(f_1,\dots,f_m)$ 上の連続関数 H_j があって $h_j(x)=H_j(\hat f_1(x),\dots,\hat f_m(x))$ となる．この H_j を $\sigma(f_1,\dots,f_m)$ を含む variety 上の正則関数に延長出来れば，最初の主張が得られる．そこで，$\tilde\pi(z_1,\dots,z_m)=(z_1,\dots,z_n)$ とする．まず条件(1)から

$$(5)\quad G_k(H_1(\xi),\cdots,H_s(\xi),\tilde{\pi}(\xi))=0 \quad \text{on } \sigma(f_1,\cdots,f_m)$$
$$\text{for } k=1,\cdots,t,$$

となる．一方 $\zeta\in\sigma(f_1,\cdots,f_m)$ に対して，$\hat{\zeta}=(H_1(\zeta),\cdots,H_s(\zeta),\tilde{\pi}(\zeta))$ とおいて，ζ の近傍 $\tilde{\Delta}_\zeta=\pi(\Delta_{\hat{\zeta}})\times\mathbb{C}^{m-n}$



及び $\tilde{\Delta}_\zeta$ 上の正則関数



$\tilde{H}^\zeta_j=H^{\hat{\zeta}}_j\circ\tilde{\pi}$, $j=1,\cdots,s$ を考えると，

(4) から $k=k_1,\cdots,k_s$ に対しては

$$(*)\quad G_k(\tilde{H}^\zeta_1(\xi),\cdots,\tilde{H}^\zeta_s(\xi),\tilde{\pi}(\xi))=0 \quad \text{on } \tilde{\Delta}_\zeta$$

となっている．さて，joint spectrum $\sigma(h_1,\cdots,h_s,f_1,\cdots,f_n)$ のコンパクト性から $\{\Delta_w\}$ が有限被覆としてよく，従って $H^w_1,\cdots,H^w_s$ も全体で有界であるとしてよく，これらは Δ_w 上で一様連続であるとしてよい．このとき，各 Δ_w は w を中心とする半径 ε の polydisc $\Delta^m(\zeta;\varepsilon)\subset\tilde{\Delta}_\zeta$ を次のように取ることが出来る：

$$\begin{cases}\xi\in\Delta^m(\zeta;\varepsilon) \text{ ならば } (\tilde{H}^\zeta_1(\xi),\cdots,\tilde{H}^\zeta_s(\xi),\tilde{\pi}(\xi))\in\Delta^{s+n}(w;\delta/2)\\ \xi\in\Delta^m(\zeta;\varepsilon)\cap\sigma(f_1,\cdots,f_m) \text{ ならば } (H_1(\xi),\cdots,H_s(\xi),\tilde{\pi}(\xi))\in\Delta^{s+n}(w;\delta/2)\end{cases}$$

(5)及び(4)によって，$\tilde{H}_j^{\zeta}$ は $\Delta^m(\zeta;\varepsilon)$ 上では H_j の延長になっている．また $\tilde{U}_\zeta=\Delta^m(\zeta;\varepsilon/2)$ とおいて，$\tilde{U}_\zeta$ の subvariety を

(6) $V_\zeta=\{\xi\in\tilde{U}_\zeta;\ G_k(\tilde{H}_1^{\zeta}(\xi),\cdots,\tilde{H}_s^{\zeta}(\xi),\tilde{\pi}(\xi))=0,\ k=1,\cdots,t\}$

によって定義して，$\tilde{U}=\bigcup\tilde{U}_\zeta$，$V=\bigcup\tilde{V}_\zeta$（ただし，$\zeta\in\sigma(t_1,\cdots,t_m)$）とおく．(4)により V は $\sigma(t_1,\cdots,t_m)$ を含んでおり，(4)における一意性から，$\tilde{H}_j^{\zeta}$ は V 上では一つの正則関数 $\tilde{H}_j$ を定義していて，H_j の拡張となっており，V は $\tilde{U}$ の subvariety になることがわかる．よって，$g_j=\tilde{H}_j(t_1,\cdots,t_m)$ が求める元である．

$\mathrm{rank}\dfrac{\partial(G_1,\cdots,G_t)}{\partial(z_1,\cdots,z_{s+n})}=s$ が $\sigma(h_1,\cdots,h_s,t_1,\cdots,t_n)$ の近傍で成立するという仮定を加える．(*)にあるように，$k=k_1,\cdots,k_0$ に対しては $G_k(\tilde{H}_1^{\zeta}(\xi),\cdots,\tilde{H}^{\zeta}(\xi),\tilde{\pi}(\xi))=0$ on $\tilde{\Delta}_\zeta$ が成立しているが，この仮定は，G_k のうち一次独立なものは $G_{k_1},\cdots,G_{k_0}$ だけで，その他の G_k は $G_{k_1},\cdots,G_{k_0}$ を用いて表わすことができるということであるから，すべての k に対して(*)が成立することになる．よって，(6)においては，$V_\zeta=\tilde{U}_\zeta$，従って，$V=\tilde{U}$ となり $\mathbb{C}^m$ の open set $\tilde{U}$ 上で方程式

$$G_k(\tilde{H}_1(\xi_1,\cdots,\xi_m),\cdots,\tilde{H}_s(\xi_1,\cdots,\xi_m),\xi_1,\cdots,\xi_n)=0,\ k=1,\cdots,t$$

が成立する．よって各変数に $t_1,\cdots,t_n$ を代入すると，

$$G_k(g_1, \cdots, g_s, f_1, \cdots, f_m) = 0, \quad k = 1, \cdots, t$$

となり，才2の主張が得られる．

最後に一意性であるが，そのために次の補題を使う．

<u>補題3</u>　(g_{ki}) をAの元からなる $s \times t$ 行列 $(t \geq s)$ であって，各点 $x \in M_A$ に対して定まる行列 $(\hat{g}_{ki}(x))$ が nonsingular，すなわち，$\mathrm{rank}(\hat{g}_{ki}(x)) = s$ とする．このとき，Aの元からなる $t \times s$ 行列 (h_{jk}) が存在して，

$$\begin{pmatrix} h_{11} \cdots h_{1t} \\ \cdots\cdots \\ h_{s1} \cdots h_{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \cdots g_{1s} \\ \cdots\cdots \\ g_{t1} \cdots g_{ts} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad (s \times s \text{ 単位行列})$$

となる．

<u>証明</u>　仮定により $\mathbb{C}^{st}$ 上で座標 $(z_{11}, \cdots, z_{1s}, \cdots, z_{t1}, \cdots, z_{ts})$ で考えると，$s \times t$ 行列 (z_{ki}) は joint spectrum $\sigma(g_{11}, \cdots, g_{1s}, \cdots, g_{t1}, \cdots, g_{ts})$ の近傍で nonsingular である．Arens-Calderón の補題によりAの元 $u_1, \cdots, u_q$ があって，$\pi(z_{11}, \cdots, z_{ts}, z_1, \cdots, z_q) = (z_{11}, \cdots, z_{ts})$ とするとき，行列 (z_{ki}) は $\pi(\hat{\sigma}(g_{11}, \cdots, g_{ts}, u_1, \cdots, u_q))$ の近傍で nonsingular となる．そこで，行列 (z_{ki}) を $\mathbb{C}^{st+q}$ 上の行列関数と考えて，$\hat{\sigma}(g_{11}, \cdots, g_{ts}, u_1, \cdots, u_q)$ を含む open polynomial convex set P を考えれば，(z_{ki}) は P 上で nonsingular にできる．$\mathcal{O}$ を P 上の正則関数の germ の作る sheaf とし，$\mathcal{O}^s$ は $\mathcal{O}$ の s 個の直積

をあらわす $\mathcal{O}$-moduleとする. このとき, 行列 (z_{ki}) によって sheaf homomorphism $\Phi: \mathcal{O}^s \to \mathcal{O}^t$ が induce される. quotient sheaf を $\mathcal{T} = \mathcal{O}^t/\Phi(\mathcal{O}^s)$ とすれば, exact 列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^s \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}^t \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow 0$$

が得られる. ここで, 行列 (z_{ki}) が nonsingular ということから $\mathcal{T}$ が locally free sheaf となる. [4] Chap. VIII, Th. 8C によって, 上の exact 列は split する. すなわち, sheaf homomorphism $\Psi: \mathcal{O}^t \to \mathcal{O}^s$ があって, $\Psi \circ \Phi = \mathrm{identity}$ となる. Ψ の行列による表現を (H_{jk}) とすると, 各 H_{jk} は open set P 上の正則関数であり, $(H_{jk})(z_{jk}) = s \times s$ 単位行列 となる. よって, $h_{jk} = H_{jk}(g_{11}, \cdots, g_{st}, u_1, \cdots, u_q)$ とおけば, 求める行列 (h_{jk}) が得られる//

<u>一意性の証明</u>: A の元 $g_1, \ldots, g_s$ で, $G_k(g_1, \cdots, g_s, t_1, \cdots, t_n) = 0$, $k = 1, \cdots, t$ となるものが存在して $\mathrm{rank}\dfrac{\partial(G_1, \cdots, G_t)}{\partial(z_1, \cdots, z_s)} = s$ on $\alpha(g_1, \cdots, g_s, t_1, \cdots, t_n)$ とする. このとき, $\hat{r}_1 = \cdots = \hat{r}_s = 0$ なる A の元 $r_1, \cdots, r_s$ があって $G_k(g_1 + r_1, \cdots, g_s + r_s, t_1, \cdots, t_n) = 0$ ならば, A の元として $r_1 = \cdots = r_s = 0$ を示せばよい. ところで, 変数 $(z_1, \cdots, z_{s+n}, a_1, \cdots, a_n)$ の関数 $G_k(z_1 + a_1, \ldots, z_s + a_s, z_{s+1}, \cdots, z_{s+n})$ は, ε を十分小さく取れば, $\alpha(g_1, \cdots, g_s, t_1, \cdots, t_n) \times \Delta^s(0; \varepsilon)$ の近傍で正則となる. 変数 $a_1, \ldots, a_s$ に関してテイ

ラー展開して考えれば，の$(g_1,\cdots,g_s,t_1,\cdots,t_n)\times\Delta^s(0;\varepsilon)$ の近傍で正則な関数 F_{kij} があって

$$
\begin{aligned}
&G_k(z_1+a_1,\cdots,z_s+a_s,z_{s+1},\cdots,z_{s+n})-G_k(z_1,\cdots,z_{s+n})\\
&\qquad -\sum_{i=1}^{s}a_i\frac{\partial G_k}{\partial z_i}(z_1,\cdots,z_{s+n})\\
&=\sum_{i,j=1}^{s}a_ia_jF_{kij}(z_1,\cdots,z_{s+n};a_1,\cdots,a_s),\quad k=1,\cdots,t
\end{aligned}
$$

と書ける．ここで，元 $g_1,\cdots,g_s,t_1,\cdots,t_n,r_1,\cdots,r_s$ を各変数に代入すると

$$
\begin{aligned}
(**)\quad &-\sum_{i=1}^{s}r_i\frac{\partial G_k}{\partial z_i}(g_1,\cdots,g_s,t_1,\cdots,t_m)\\
&\qquad=\sum_{i,j=1}^{s}r_ir_jF_{kij}(g_1,\cdots,g_s,t_1,\cdots,t_m;r_1,\cdots,r_s)
\end{aligned}
$$

となる．さて，

$$
g_{ki}=\frac{\partial G_k}{\partial z_i}(g_1,\cdots,g_s,t_1,\cdots,t_m)+\sum_{j=1}^{s}r_jF_{kij}(g_1,\cdots,g_s,t_1,\cdots,t_m;r_1,\cdots,r_s)
$$

とおいて，(**)を行列の形で書けば，

$$
\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1s}\\ & \cdots & \\ g_{t1} & \cdots & g_{ts}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1\\ \vdots\\ r_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}
$$

となる．$(\hat{g}_{ki})=\dfrac{\partial(G_1,\cdots,G_t)}{\partial(z_1,\cdots,z_s)}$ であるから，仮定より(g_{ki})はAの元からなるnonsingularな行列である．従って，補題3により左逆行列があるから$r_1=\cdots=r_s=0$ が得られる．(証明終)

あと書き：　補題3において，はじめ考えたときには，行列 (g_{ki}) に足りない成分を補なっても次の正方行列で，$\det(\hat{g}_{ki}) \neq 0$ on M_A となるものが作くれないかと思った．そうすれば $\det(g_{ki})$ はAの invatible な元となり，Cramer の公式で (g_{ki}) の逆行列が作くれる．しかし，これは $t=s-1$ のときにしか成功しない．—— 反例を知らないのでありますが，たぶん一般には出来ないと思います．しかしながら，補題3で作った quotient sheaf $\mathcal{T} = \mathcal{O}^t/\Phi(\mathcal{O}^s)$ が free sheaf になっていれば，(g_{ki}) に足りない成分を補っても次の可逆な正方行列にすることができる．

なお，残念なことは，この定理には今のところこれといった応用のないことである．

参 考 文 献

1. Allan, G. R., An extension of the Silov-Arens-Calderón theorem, J. London Math. Soc. 44 (1969), 595-601.
2. Arens, R. and Calderón, A. P., Analytic functions of several Banach algebra elements, Ann. Math. 62 (1955), 204-216.
3. Gamelin, T. W., Uniform Algebras, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969.
4. Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic Functions of Several

Complex Variables, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.

5. Hayashi, M., Implicit function theorem for Banach algebras, (to appear).

6. Stout, E. L., The Theory of Uniform Algebras, Bogden & Quigley, Inc. 1971.